



LES DOCUMENTS
PEDAGOGIQUES DE L'IFORD

MOUVEMENTS ET MODELES DE POPULATION

Nicolas BROUARD

Institut de Formation et de
Recherche Démographiques
(I.F.O.R.D.)
YAOUNDE (Cameroun)

Juin 1989

INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHES DÉMOGRAPHIQUES

MOUVEMENTS ET MODÈLES DE POPULATION

Nicolas Brouard

I.Fo.R.D Yaoundé

Cameroun

Mai 1986

Ce cours a pour but d'apporter aux étudiants une connaissance théorique des principaux modèles de dynamiques des populations. Les démographes utilisent principalement les modèles de population stable ou quasi-stable, mais il est important de connaître les premiers modèles théoriques, de Lotka en particulier, sur les compétitions entre espèces (modèle proie-prédateur et modèle de pêche). Un chapitre est donc consacré aux modèles de population généraux où seules les populations totales, sans considération de classe d'âge, interviennent.

Pour traiter des populations à classes d'âge stables, il est nécessaire de revoir les deux composantes que sont mortalité et fécondité par âge. Un chapitre est alors consacré d'une part à une présentation de la table de mortalité et à son associé le modèle de population stationnaire, d'autre part, à la fécondité par âge. Ces chapitres sont très descriptifs et montrent concrètement sur une très longue période (la France depuis la fin du 18^e siècle) l'évolution des indices classiques dégagés par la théorie. Enfin il permet une confrontation des analyses longitudinales et transversales.

Avant d'aborder les modèles de population stable un chapitre est consacré à la modélisation de la mortalité et de la fécondité par âge.

Le chapitre sur les populations stables ne traitent que la théorie de Lotka et des problèmes de convergence (forte et faible), laissant au cours de statistiques imparfaites le soin d'en étudier les applications pratiques.

Table des matières

Table des matières	5
1 Mesures des variations d'une population	7
1.1 Diagramme et domaines de Lexis	7
1.2 Le taux	8
1.2.1 Taux sur un domaine	8
1.2.2 Remarques	10
1.3 Le champs de vecteur population	11
1.3.1 Passage d'une densité discrète à une densité continue . . .	11
1.4 Taux d'accroissement d'une population	14
1.4.1 Taux d'accroissement instantané	16
1.4.2 Taux de croissance constant	16
1.4.3 Analogies économiques : taux d'intérêt	20
1.4.4 Indice	21
1.4.5 Quotients	22
1.4.6 Relation entre le taux et le quotient	25
2 Modèles de populations contraintes, interaction avec le milieu ou d'autres espèces (approche sans classe d'âge)	27
2.1 Population logistique	31
2.1.1 Expression de la taille de la population en fonction du temps	33
2.1.2 Étude des variations de la fonction logistique	34
2.2 Interaction entre les espèces	42
2.2.1 Compétition entre deux espèces	42
2.2.2 Modèle proie-prédateur ou hôte-parasite	46
2.3 Modèles de pêche, chasse, émigration	52
2.3.1 Pêche par quota	53
2.3.2 L'effort de pêche est constant dans le temps	54
2.3.3 Conclusion	54
3 Introduction à l'analyse statistique de la mortalité par une étude de cas	55
3.1 Le taux brut de mortalité	56
3.2 Le processus de mort	58

3.3	La mesure des risques de mortalité par âge	60
3.4	L'espérance de vie	64
3.5	La table de mortalité	66
3.6	Liaison entre mortalité et vieillissement d'une population	68
3.7	Mortalité du moment et mortalité réelle des génération	68
3.8	Un exemple d'interprétation difficile : la mortalité par cancer du poumon	76
4	Approche infinitésimale de la mortalité	81
4.1	Calcul d'une table de mortalité en continu	81
4.1.1	Force de mortalité	81
4.1.2	Distribution des décès	82
4.1.3	Espérance de vie à la naissance	82
4.1.4	Écart-type de l'âge au décès	84
4.2	Population stationnaire	85
4.2.1	Age moyen de la population stationnaire	86
4.2.2	Pyramide des années à vivre	87
4.2.3	Relations entre le taux de mortalité, la force et le quotient	89
4.3	Moments et cumulants	90
4.3.1	Fonction génératrice des fréquences	90
4.3.2	Fonction génératrice des moments	91
4.3.3	Fonction caractéristique	92
4.3.4	Cumulants	93
4.4	Relations entre les moments et cumulants d'une table de mortalité	94
5	Analyse de la fécondité par une étude de cas	95
5.1	La série brute des naissances et du taux de natalité	95
5.2	Fécondité par âge	99
5.3	Variations transversales de la fécondité	104
5.4	L'analyse longitudinale	105
5.4.1	La fécondité d'une génération	107
6	Les différentes mesures de la reproduction	115
6.1	Cas où la mortalité et la fécondité sont constantes dans le temps	116
6.2	Analyse par génération	121
6.2.1	Baisse de la mortalité infantile et juvénile : la reproduction à 15 ans	123
6.2.2	Baisse de la mortalité aux âges élevés : reproduction des années vécues	124
7	Modélisation de la mortalité par âge : les nouvelles tables des Nations-Unies	129
7.1	Principe des tables-types	129
7.2	La méthodologie	130
7.2.1	Analyse du nuage des 36 points	132
7.2.2	Généralisation à plus de 3 dimensions	133

7.2.3	Tables types à 2 et 3 paramètres	133
7.2.4	Les résultats	134
7.3	Application aux ajustements	134
7.3.1	Tables complètes	134
7.3.2	Tables incomplètes	137
7.3.3	Tables à trois paramètres	140
8	Modélisation de la fécondité par âge : le modèle de Coale-MCNeil-Trussell	141
8.1	La nuptialité par âge : Coale-MCNeil	141
8.1.1	Le modèle de nuptialité dû à Feeney, McNeil et Coale . .	144
8.2	Le modèle de fécondité dans le mariage : Coale-Henry-Trussell .	146
8.3	Le modèle de fécondité générale	147
9	Modèles de population intégrant la fécondité et la mortalité	151
9.1	POPULATIONS MALTHUSIENNES (approche infinitésimale) .	151
9.1.1	Existence d'une population malthusienne	154
9.1.2	Répartition par âge des décès	156
9.1.3	Estimation du taux de croissance à partir de la distribu- tion des décès	157
9.2	POPULATIONS STABLES	158
9.2.1	Estimation du taux de croissance de Lotka	162
A	Tableaux préremplis pour l'ajustement d'une table type des Nations-Unies	165
A.1	Femmes	165
A.1.1	Table à deux composantes	171
A.1.2	Table à trois composantes	172
A.2	Hommes	173
A.2.1	Table à deux composantes	178
A.2.2	Table à trois composantes	179
	Bibliographie	184
	Listes des figures	187
	Listes des tableaux	189

Chapitre 3

Introduction à l'analyse statistique de la mortalité par une étude de cas

Pour étudier la mortalité d'un pays et son évolution, la donnée la plus simple, mais la plus nécessaire est le décompte régulier de ces décédés. Ces données ne sont pas disponibles la plupart du temps en Afrique du fait d'un état civil trop récent, mais l'objet de ce chapitre est de faire comprendre quand et comment l'homme s'est intéressé à mesurer quantitativement la mortalité, et quels sont ses outils de mesure. Il n'est pas possible de prendre comme référence un pays d'Afrique, car il est nécessaire de posséder des données par âge simple durant une période suffisamment longue pour comprendre facilement, sur des exemples concrets, l'intérêt de ces outils. Notre étude de cas portera sur un pays dont les statistiques, fiables, existent depuis plusieurs siècles, à savoir la France. Nous pourrions prendre d'autres pays comme l'Angleterre (que nous mentionnerons parfois pour des exemples précis), la Suède ou la Norvège, mais d'une part la démographie historique semble particulièrement développée en France depuis les travaux de L. Henry [30] et d'autre part l'auteur de ce cours connaît sûrement mieux ce pays.

Revenons maintenant à l'étude du décompte des décès dans un pays. Les intervalles durant lesquelles les relevés sont effectués peuvent différer selon la nature des statistiques (un mois, un trimestre, une année, un groupe d'années . . .). Qui plus est, la taille de la population affectée par ces décès varie au cours de l'intervalle ou d'un intervalle à l'autre en raison de la mortalité elle-même, mais aussi de la natalité et des migrations. Pour éliminer ces perturbations, il convient de rapporter les décès de la période considérée à la valeur moyenne de cette population. Ce rapport, homogène à l'inverse d'un temps¹, est conventionnellement appelé *taux brut de mortalité*. Il est généralement ramené à une

¹voir le chapitre 1.

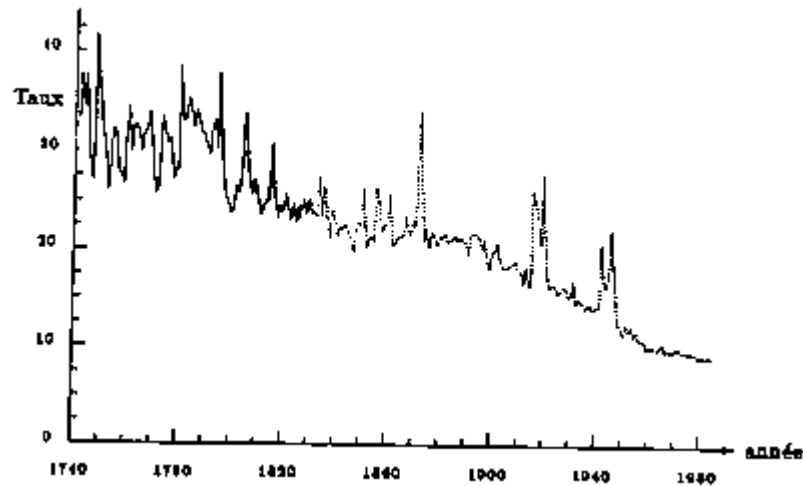


FIG. 3.1 – Évolution du taux brut de mortalité en France depuis 1740.

dimension annuelle. Cet indice simple va nous permettre de suivre l'évolution historique de la mortalité, mais nous verrons qu'il ne reflète pas l'évolution de la mortalité *pure*, car il est sensible aux déformations de la structure par âge provenant d'autres phénomènes que la mortalité. Nous serons donc amenés à affiner nos mesures, en introduisant progressivement les différentes notions qui conduisent à la construction d'une *table de mortalité* et à ses deux principaux modes de calcul *du moment* et *par génération*.

3.1 Le taux brut de mortalité

Grâce aux études de démographie historique (L. Henry)² fondées sur un échantillon de registres paroissiaux, certains pays comme l'Angleterre, la Suède ou la France disposent des données nécessaires au calcul du taux brut de mortalité depuis plusieurs siècles (1740 en France) alors que la statistique administrative (état civil, recensement) de tels pays ne donne les résultats nécessaires que depuis le 19^e siècle (1806) et encore de façon très parcellaire. Ainsi la figure 3.1 (source [43]) retrace l'évolution du taux brut de mortalité depuis le milieu du 18^e siècle. La baisse de la mortalité qu'il traduit est fondamentale pour l'histoire de la société française et de nature comparable pour les autres pays.

Oscillant autour de 40 pour mille en 1740, le taux brut est descendu aux environs de 11 pour mille pour les années récentes. Ces deux siècles d'observation correspondent à la phase cruciale pour un pays qu'on appelle la *transition*

²Voir notamment à ce sujet le numéro spécial de *Population* sur la Démographie historique, Paris, INED, Novembre 1975.

démographique³ et qui conduit d'un régime ancien à forte mortalité à un régime nouveau à faible mortalité. En fait, les années 1750-1795 constituent un palier maximal durant lequel le taux brut oscille autour de 35 pour mille⁴. Sauf à considérer la période 1740-1795 comme une première phase de baisse ou la fin d'une première phase de baisse plutôt qu'une forte fluctuation, la longue période de baisse n'a réellement commencé qu'en 1795. Cette baisse s'accompagne de fluctuations qui, très importantes au départ, vont en s'estompant avec le temps jusqu'à devenir presque imperceptibles (hormis les guerres) au 20^e siècle. Le régime démographique ancien, antérieur au 19^e siècle était en effet un régime de crise où de nombreuses disettes, épidémies ou guerres venaient brutalement aggraver une mortalité déjà élevée en temps ordinaires. Au début de la période de transition, les crises alimentaires et les épidémies (choléra notamment) ont persisté bien que leurs effets soient devenus moins violents que ceux de la guerre (Révolution, guerres impériales). Progressivement, elles ont reculé, tandis que le niveau de mortalité des années ordinaires diminuait. Aujourd'hui elles ont disparu et seules les 3 guerres franco-allemandes perturbent l'évolution régulière des 12 dernières décennies. La grippe de 1969 se voit à peine sur la figure 3.1.

Abstraction faite des crises, la mortalité moyenne baisse rapidement de 1790 à 1810, puis plus lentement de 1810 à 1850, mais stagne durant la seconde moitié du 19^e siècle jusqu'à la guerre de 1870. De 1895 à 1970, au contraire, la baisse s'opère à un rythme rapide et continu.

Le développement d'un pays et la chute de sa mortalité sont évidemment en interaction sur le long terme ; pourtant les ruptures de rythmes qui caractérisent la baisse de la mortalité en France, n'ont pas d'équivalents économiques. Ainsi, s'il est compréhensible que l'essor économique de la fin du 18^e siècle et du début du 19^e s'accompagne d'une chute de la mortalité, le lien entre la forte industrialisation et la stagnation de la mortalité qui caractérisent le Second Empire est moins évident. Il est vraisemblable qu'à cette époque le progrès économique ait été obtenu aux dépens de la santé de fractions importantes de

³Le terme de transition démographique évoque aussi le passage d'un régime de haute fécondité à un régime de basse fécondité. Dans la plupart des pays le déclin de la fécondité a lieu après le déclin de la mortalité, induisant durant cette transition une forte croissance de la population. Dans le cas de la France, la fécondité a baissé en même temps que la mortalité, ce qui est une des causes de la faible croissance de la population française comparée à celle des pays voisins.

Le lecteur peut se demander pourquoi les démographes considèrent que la transition démographique est terminée dans les pays développés alors que, la mortalité et la fécondité semblent pouvoir encore baisser. On peut considérer en effet que la transition est terminée lorsque la mortalité, depuis la naissance jusqu'à l'âge moyen à la reproduction (aux environs de 27 ans pour les femmes et 29 pour les hommes) est pratiquement nulle et qu'ainsi, une nouvelle baisse de la mortalité ne peut plus compenser une baisse concomitante de fécondité pour le renouvellement des générations.

La situation actuelle (faible mortalité, faible fécondité) des pays développés est qualifiée de nouvel *équilibre* par les démographes, mais il ne faut plus compter sur une baisse de la mortalité, pour contrebalancer une éventuelle baisse de la fécondité. La population continue à croître, mais en vieillissant (voir le paragraphe 6.2.2 du chapitre 6).

⁴En effet, une population ne peut survivre avec des taux de mortalité supérieurs à 35 pour mille car la natalité (entendons le taux brut de natalité) maximale, celle qui correspond à ce que les démographes ont appelé la *fécondité naturelle*, ne peut dépasser 40 pour mille.

la population et notamment du prolétariat naissant.

A compter de la fin du XIX^e siècle, au contraire, accélérée par la révolution pasteurienne, le progrès médical a eu d'autant plus d'efficacité que la société s'était adaptée au nouveau système économique en se dotant de protections sociales qui n'ont pas cessé de se perfectionner au XX^e siècle.

Le taux brut de mortalité nous a permis de décrire rapidement le passage historique du régime ancien de forte mortalité au régime actuel de faible mortalité, mais nous ne savons toujours pas quelle pouvait être la durée de vie moyenne au milieu du 18^e siècle, ni ce qu'elle est devenue de nos jours. Pourtant, le lecteur doit pressentir que lorsque les conditions démographiques sont stationnaires, comme c'était plus ou moins le cas dans la période 1750-1795, le taux brut doit nous renseigner sur la vie moyenne des hommes. En effet, supposons que vous soyez préposé à changer les lampes à néon d'une grande salle (qui en contient mille) dès qu'elles ne fonctionnent plus, et que vous ayez besoin en moyenne de 40 lampes neuves par mois. Quelle est alors la durée de vie moyenne d'une lampe? Votre réponse est sûrement $\frac{1}{40} = 25$ mois. Ce résultat intuitif est en effet correct, et on peut considérer que la France et plus généralement tous les pays avant leur transition, vérifiaient assez largement les conditions de ce théorème. La durée moyenne de vie en France avant la transition oscillait donc entre $\frac{1}{30} = 33,3$ ans et $\frac{1}{40} = 25$ ans.

On voit néanmoins tout de suite les limites d'un tel raisonnement, car si le taux brut actuel en France par exemple, atteint 10 pour mille, la durée de vie moyenne devrait être de 100 ans! De même le taux brut de mortalité de la Chine lors de son recensement de 1980, était de 7 pour mille, en déduire une espérance de vie de 142 ans serait évidemment une erreur grossière! En période de changement démographique, en effet, le théorème ne se vérifie plus et l'inverse du taux brut de mortalité est souvent bien supérieure à l'espérance de vie. Dans le cas de la France nous verrons que les conditions de stationnarité ne sont pas requises pour beaucoup de raisons, dont en particulier, l'impact des deux dernières guerres mondiales sur les naissances. Dans le cas de la Chine, cas typique d'un pays du Tiers Monde, cela tient à la forte fécondité passée, et donc au taux de croissance important.

Le taux brut de mortalité nous indique tout de même que les Français du milieu du 18^e siècle avaient une durée de vie moyenne de l'ordre d'une trentaine d'années, et que celle-ci a fortement augmenté. Mais outre que la valeur de cette durée est imprécise, il ne s'agit que d'une moyenne qui nous renseigne en rien sur l'importance de la variabilité entre les individus. Était-il fréquent d'atteindre 40, 60 ou 80 ans au milieu du 18^e? Pour aller au delà et calculer précisément la durée de vie de l'époque actuelle, et sa variabilité entre les individus, il faut étudier le processus qui, d'âge en âge, conduit chaque individu à la mort.

3.2 Le processus de mort

Le processus que nous allons étudier, sous entend une certaine continuité et il peut paraître ambitieux de vouloir le cerner pour l'Ancien Régime où la

mortalité, nous l'avons vue, sévit surtout sous forme de crise. Pourtant le premier homme à l'avoir découvert a vécu sous cet Ancien Régime. Il s'agit de J. Graunt, un drapier de Londres du milieu du 17^e siècle [23], qui pour la première fois, a osé classer, puis compter les morts comme des marchandises, afin d'en étudier la loi de survie.

J. Graunt est parti de l'idée que chaque individu a une certaine capacité de résistance à la mort qui dépend uniquement de son âge. Il fait l'hypothèse que tous les individus du même âge courent un risque égal de mortalité et que ces risques successifs constituent le processus de mort. L'hypothèse simplificatrice est de faire abstraction des différences entre individus autres que l'âge (état de santé, expositions particulières à certains risques). Le niveau du risque calculé prend en compte cette diversité, mais n'est qu'une valeur moyenne. Un fois calculé, ce risque est supposé identique pour tous les individus d'un même âge, et seul, le hasard décide que tel individu meurt alors que tel autre survit⁵.

Cette approche de la mortalité a aussi été suivie par Kersseboom [32] (1738), un hollandais, de Halley [24]⁶ (1693), un autre anglais, de Deparcieux (1746) [16], un français, et de Per Wargentin (1766) [56], un suédois⁷. Devenue classique en théorie statistique et intitulée *processus de mort*, cette approche conduit à remplir des colonnes de chiffre pour chaque âge, et c'est pourquoi les démographes l'évoque sous le nom de *table* de mortalité. Essayons d'en comprendre les fondements avant d'en aborder la construction.

L'intérêt nouveau que ces auteurs portaient à l'étude de la mortalité avait au moins deux buts.

- Le premier était de pouvoir comparer la taille puis l'accroissement des grandes villes européennes, ce qui n'a pas manqué de susciter une polémique⁸ sur la valeur du facteur (30, 35 ?) par lequel il fallait multiplier le nombre annuel des décès ou de naissances pour obtenir la population.
- Le second était d'ordre plus lucratif. En effet, découvrir l'existence d'une loi de mortalité c'était offrir un moyen raisonnable de parier sur la vie des hommes et donc d'étendre le champ d'intervention des assureurs et des banquiers, et d'instituer les rentes viagères⁹. N'est-ce pas à cette époque que Lorenzo Tonti, un banquier italien, proposa à l'état français en 1653, de renflouer ses caisses en émettant un emprunt d'état dont le taux d'intérêt varierait en fonction de l'âge du souscripteur. Cette première *Tontine Royale* fut tout d'abord refusée, mais elle fut de nouveau proposée en 1689

⁵Ceci n'interdit pas de faire des analyses par groupe, homme-femme, ville-campagne etc ; au sein d'un groupe, le raisonnement est alors le même.

⁶La comète qui porte son nom est plus connue que sa table de mortalité, mais cette dernière constitue la première table élaborée scientifiquement.

⁷Après la publication en 1754 et 1755 dans les *Actes de l'Académie des Sciences de Stockholm* de 5 traités généraux sur les problèmes statistiques de la démographie dont 3 abordent la mortalité, la communication principale de P. Wargentin sur la mortalité en Suède est publiée en 1766. Le lecteur peut se reporter à une traduction de J. Dupaquier [56]

⁸Kersseboom, dans son troisième traité, *op. cit.* se défend d'avoir voulu comparer Londres et Paris, mais tente néanmoins de justifier les chiffres critiqués.

⁹Voir notamment Deparcieux, *op. cit.*, et Leonhard Euler, [19]

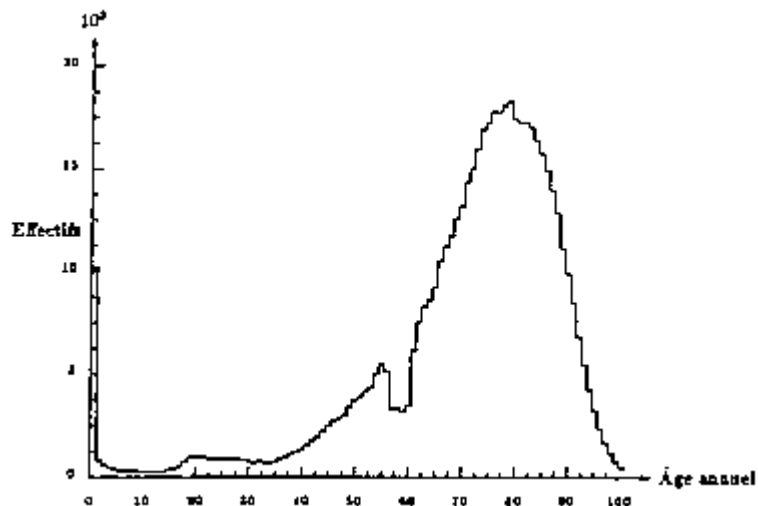


FIG. 3.2 – Distribution des 551 489 décédés en France durant l'année 1975 en fonction de leur âge.

et, cette fois, acceptée¹⁰.

3.3 La mesure des risques de mortalité par âge

Mettons nous dans l'état d'esprit des pionniers de ce domaine, qui ignoraient tout de la mortalité, et essayons, comme eux, d'étudier le processus de mort, mais avec des données de notre époque. Notre démarche s'apparente plus aux travaux de P. Wargentin en 1766, qui a, le premier, relié des données d'état civil à celles d'un recensement, mais celui-ci a bénéficié des travaux de ses prédécesseurs, depuis un siècle.

L'organisme central de la statistique d'un pays dépouille chaque année les bulletins individuels de décès établis par les officiers d'état civil et en tire des tableaux statistiques. Le plus simple et le plus important de ces tableaux est celui qui donne le classement des décès de l'année suivant l'âge des défunts. La figure 3.2 donne l'histogramme¹¹ des 551 milliers d'hommes et femmes décédés durant l'année 1975 en France.

La simple vue de cet histogramme nous montre que la majorité des décès a concerné des individus âgés entre 60 et 90 ans. Nous pourrions être tentés de calculer l'âge moyen de ces décédés et de dire qu'il s'agit de la durée de vie moyenne en France, mais ce raisonnement n'est pas correct. En effet, nous remarquons immédiatement une échancrure importante vers 55-59 ans. Celle-ci nous rappelle que cette distribution est sujette aux déformations de la structure

¹⁰Son taux variait entre 5 et 12,5%.

¹¹L'âge est en années révolues.

par âge de la population, et en particulier aux classes creuses nées durant la guerre 1914–18 (voir la figure 3.3).

Or, nous cherchons une distribution, analogue à celle de la figure 3.2 mais qui ne soit pas sensible à l'histoire passée, et qui reflète la mortalité actuelle, compte tenu des conditions sociales, médicales, économiques actuelles de la France. Le passage de la distribution des décès bruts à celle recherchée, n'est pas immédiat, et nécessite un raisonnement assez élaboré. Il consiste tout d'abord à calculer des risques par âge.

En rapportant les décès de la figure 3.2 aux valeurs moyennes¹² des effectifs susceptibles de décéder à cet âge et durant l'année 1975 (figure 3.3), nous obtenons ce que le démographe appelle un *taux de mortalité* (voir le chapitre 1 et l'annexe de ce chapitre), ou risque de décéder à cet âge. La figure 3.4 donne le résultat de ces divisions à chaque âge.

Nous sommes d'abord frappés par la régularité et les variations de cette courbe. Il est maintenant bien connu que le risque de décéder croît avec l'âge aux âges adultes, mais cela n'avait rien d'évident, car même si le risque avait été décroissant, il aurait été de toute façon plus difficile d'atteindre l'âge de la retraite que l'âge au mariage par exemple, puisqu'on est soumis plus longtemps au risque. La croissance exponentielle du risque à l'âge adulte, a beaucoup intrigué mais n'a jamais été bien expliquée ; elle reflète le vieillissement réel de l'individu.

Aux jeunes âges au contraire, plus un bébé ou enfant survit, plus il a de chance de survivre, et ce, jusqu'à l'âge de 10 ans environ où le risque de décéder passe par un minimum. Dans un pays africain, les risques de décès sont plus élevés mais la forme de la distribution des taux par âge est analogue¹³. Notons la montée récente du risque vers 18-20 ans qui résulte des accidents (voitures et motos) fréquents à ces âges.

Reprenons la recherche de notre distribution. Tout d'abord, convenons que l'âge annuel n'est qu'une commodité, et que la figure 3.4, aurait été sensiblement identique si nous avions compté l'âge en trimestre, ou en groupe quinquennal : le taux est une mesure intrinsèque qui ne dépend pas ou peu de l'intervalle d'âge choisi. Evidemment, dans le cas d'un groupe quinquennal, nous perdrons beaucoup de précision, et en gagnerions dans le cas trimestriel. Si notre intervalle de temps est infinitésimal, on parle de taux infinitésimal, ou aussi de *force de mortalité* comme l'ont introduit les premiers statisticiens. En absence d'ordinateurs, il n'est pas aisé de travailler avec des probabilités infinitésimales de décès, et les démographes utilisent des probabilités de décès durant des périodes finies (1 an, 5 ans, 10 ans), probabilités qui se déduisent des taux infinitésimaux par une formule mathématique¹⁴. Ces probabilités s'appellent aussi des *quotients de*

¹²On appelle *valeur moyenne* la quantité, exprimée en personne-années, soumise au risque de décéder. Dans notre cas, on considère que les individus âgés entre les âges x et $x + 1$ au milieu de l'année 1975 ont été soumis durant un an au risque de décéder, et que les décès proviennent de cette population.

¹³voir le chapitre sur les tables types de mortalité.

¹⁴On note $\mu(x)$ la force de mortalité à l'âge x . Ainsi $\mu(x)dx$ est la probabilité pour un individu âgé de x années de décéder entre les âges x et $x + dx$, et $1 - \mu(x)dx$ la probabilité de survivre.

A 60 ans, par exemple, le risque infinitésimal de décéder dans l'instant est de 0,01 annuel,

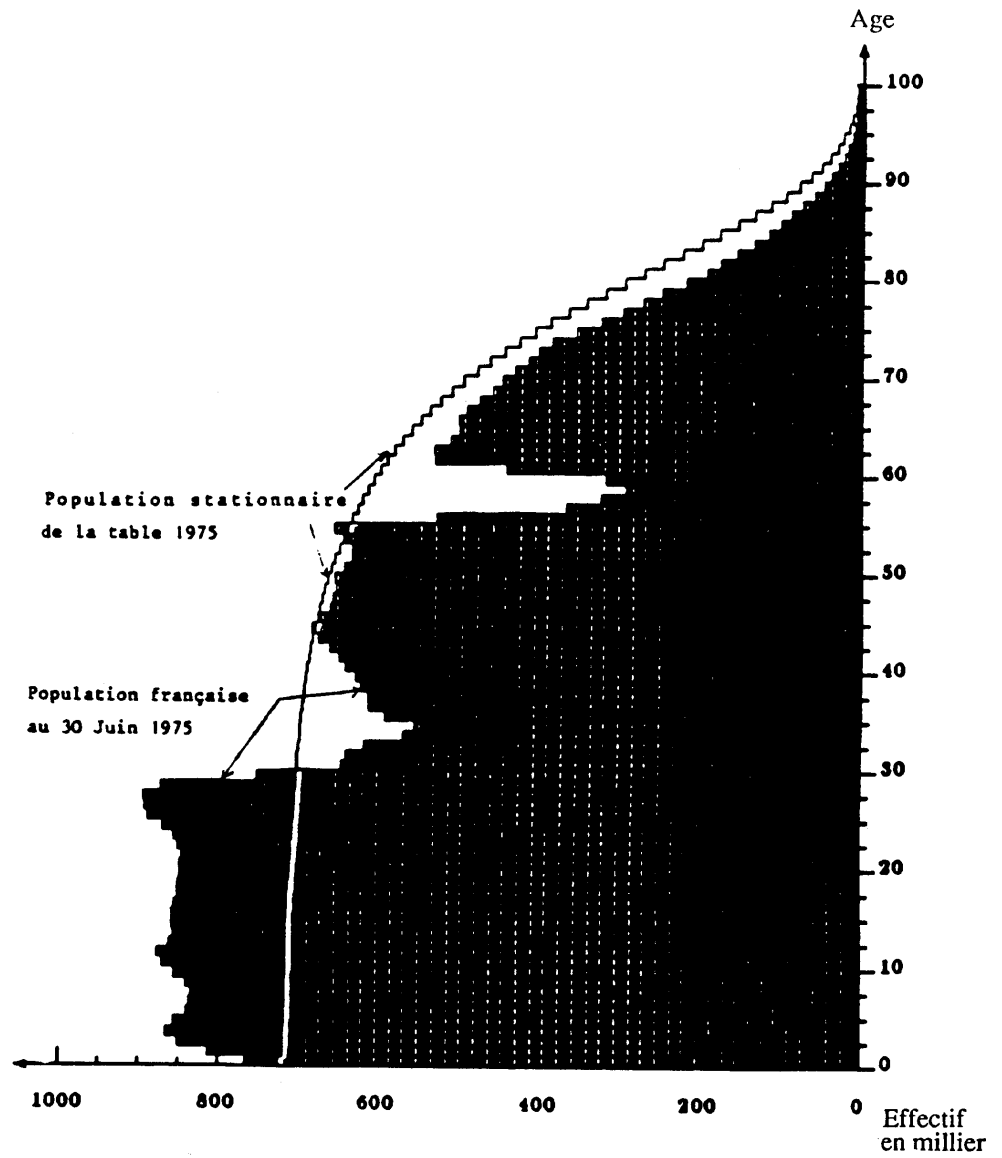


FIG. 3.3 – Structure par âge de la population française au milieu de l'année 1975. Population stationnaire de même effectif déduite de la mortalité mesurée la même année.

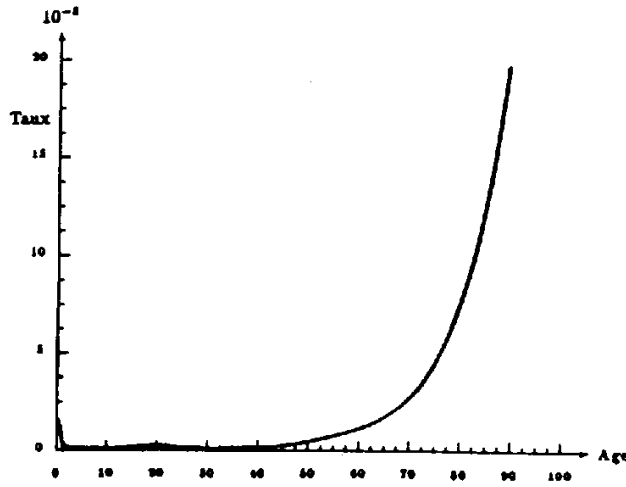


FIG. 3.4 – Risques de décès suivant l'âge en 1975 : taux de mortalité, échelle arithmétique. France.

mortalité. Ainsi, sur $S(x)$ individus d'âge x , le nombre des décès attendus¹⁵ entre les âges x et $x + 1$ est $d(x, x + 1) = S(x) {}_h Q_x$. La figure 3.5 décrit les quotients de mortalité selon l'âge annuel, avec cette fois une échelle logarithmique¹⁶. Les quotients annuels, les taux calculés sur un an, et les taux infinitésimaux ont des valeurs numériques qui ne diffèrent pratiquement pas ; autrement dit les figures 3.4 et 3.5 ne diffèrent que par leur type d'échelle¹⁷.

Nous avons maintenant tous les éléments pour trouver la distribution cherchée. Suivons le raisonnement de Graunt, prenons une cohorte de $S(0)$ nouveaux-nés. Laissons le hasard décider de la mort de $d(0, 1) = Q_0 S(0)$ enfants avant l'âge d'un an, laissant $S(1) = S(0) - d(0, 1)$ survivants à un an ; $d(1, 2) = Q_1 S(1)$ décès surviendront entre 1 et 2 ans : $S(2) = S(1) - d(1, 2)$ enfants atteindront au moins l'âge de deux ans. Poursuivons l'exercice jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de

soit $0,01 / (60 \times 60 \times 24 \times 365)$ par seconde (fig 3.4). La probabilité de décéder dans les 10 secondes est alors sensiblement 10 fois plus importante, celle de décéder dans l'heure, 3600 fois, mais celle de décéder durant l'année ou durant les 5 années à venir, ne s'obtient pas si facilement, comme nous allons le voir. En premier lieu, le calcul des probabilités élémentaires enseigne que ce sont les probabilités de survie que l'on multiplie et non les probabilités de décès que l'on additionne (dans le cas où les probabilités de décès sont petites, les résultats sont sensiblement identiques en raison de l'approximation : $1 - (1 - \epsilon)(1 - \epsilon') \simeq \epsilon + \epsilon'$). En second lieu, aux âges où la force de mortalité varie beaucoup, le calcul de la probabilité de décès doit tenir compte de cette augmentation de risque ; on montre aisément que la probabilité pour un individu âgé de x années de décéder entre les âges x et $x + h$ est ${}_h Q_x = 1 - \exp(-\int_x^{x+h} \mu(u) du)$.

¹⁵Comme le démographe raisonne le plus souvent sur des grands effectifs, il assimile l'espérance mathématique du nombre des décès à ce nombre lui-même, en écartant toute variation aléatoire.

¹⁶On note Q_x au lieu de ${}_1 Q_x$ les quotients annuels.

¹⁷Plus exactement, le quotient annuel à l'âge x concerne des individus qui auront durant l'année, en moyenne l'âge $x + \frac{1}{2}$; il est donc plus proche du taux infinitésimal à l'âge $x + \frac{1}{2}$.

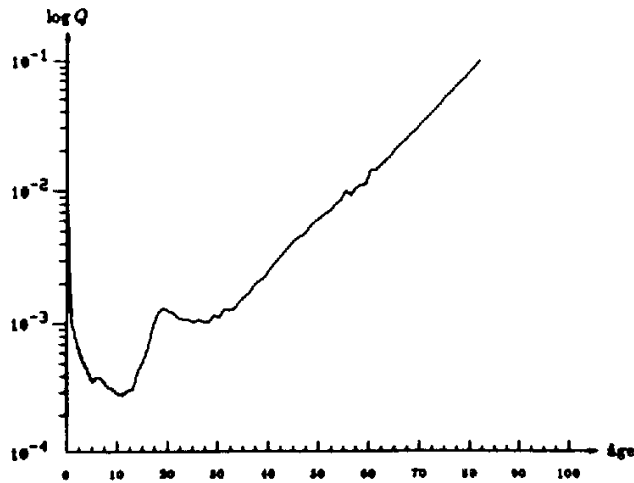


FIG. 3.5 – Probabilités de décès entre un anniversaire et le suivant. Quotients annuels par âge, 1975, France (échelle logarithmique).

survivant, et nous obtenons la distribution que nous cherchions. L'histogramme des décès qui en résulte est représenté sur la figure 3.6 ; notre première démarche qui concluait que les hommes mouraient entre 60 et 90 ans n'est pas contredite par cette nouvelle distribution, mais ici, le calcul est rigoureux.

3.4 L'espérance de vie

La figure 3.6 illustre la mortalité calculée avec les seules données (état civil et recensement) de l'année 1975 et on l'appelle de ce fait la mortalité *du moment*. Comme il est difficile de véhiculer l'information de la distribution complète, on préfère la résumer par son espérance mathématique encore appelée *espérance de vie* ou *vie moyenne*. Celle-ci s'établit à 73,0 ans. Les démographes font hélas rarement mention de l'écart-type très élevé de la distribution, égal ici à 18 ans.

La distribution, $S(x)$, des survivants à chaque âge, apparaît sur la figure 3.7. On peut y lire que 21 % des nouveau-nés n'atteindrait pas l'âge de 65 ans. L'âge médian au décès, c'est à dire l'âge où 50 % des individus sont décédés est 77 ans, soit, supérieur de 4 années à l'espérance de vie ; cet écart provient du fait que les décès par âge sont plus étalés avant 77 ans qu'après.

La courbe des survivants correspond aussi à ce qu'on appelle la *population stationnaire*. En effet, si tous les ans naissait un même nombre d'enfants, et si les risques de mortalité restaient constamment ceux de l'année 1975, la pyramide des âges de cette population, prendrait la forme de cette distribution, redressée d'un quart de tour¹⁸. Il apparaît ainsi clairement évident que, toutes choses

¹⁸La courbe des survivants, $S(0) = 1, S(1), \dots$, est une interpolation linéaire de la fonction

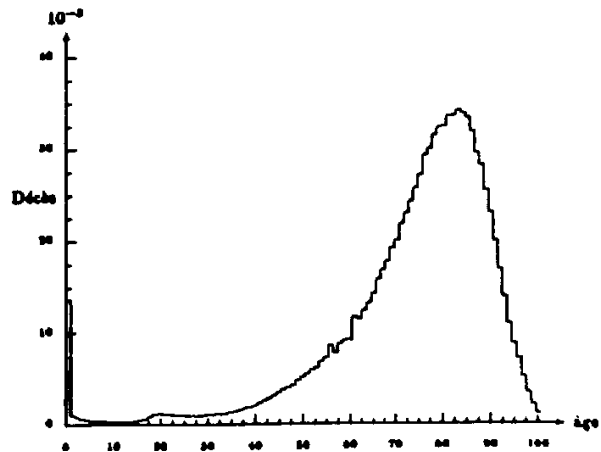


FIG. 3.6 – Distribution des âges au décès d'une cohorte de 1000 nouveau-nés soumise aux risques de décéder par âge mesurés en 1975

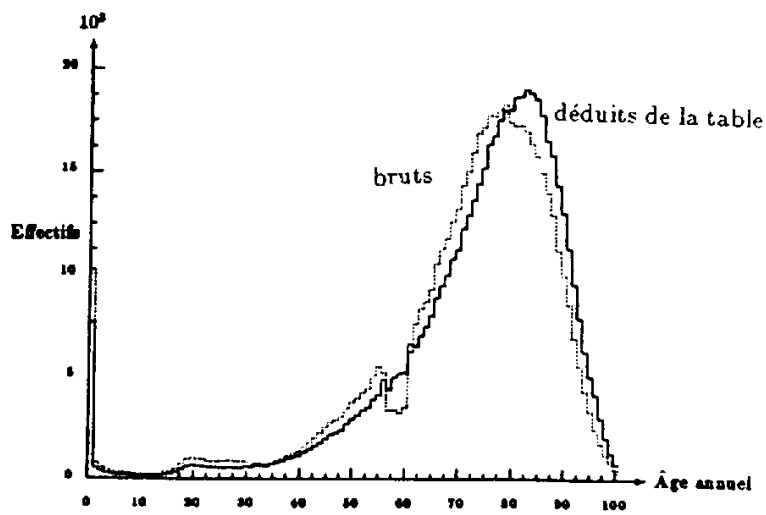


FIG. 3.7 – Fonction de survie déduite des quotients de mortalité mesurés en 1975. France.

égales par ailleurs, plus l'espérance de vie d'une population est élevée, plus la place qu'y tiennent les personnes âgées est importante.

3.5 La table de mortalité

Il est coutumier de regrouper les valeurs des 3 fonctions principales, quotients, survivants et décès dans ce qu'on appelle une *table de mortalité*. On adjoint à cette table d'autres colonnes et en particulier l'espérance de vie à chaque âge, et les taux. La table de mortalité de l'année 1982 de la France est donnée dans les tableaux 3.1 et 3.2.

de survie continue, $S(x)$, déduite de la force de mortalité μ : $S(x) = \exp(-\int_0^x \mu(u)du)$. La pyramide des âges est un *histogramme*, en ce sens, qu'on la représente par des rectangles, plutôt que des trapèzes à chaque âge. Il s'agit alors du nombre d'individus compris entre deux âges exacts, plutôt que, dans le cas des survivants, d'un effectif à l'âge exact. Rappelons que c'est dans le cas d'une telle population stationnaire que le taux brut de mortalité (comme le taux brut de natalité) est égal à l'inverse de l'espérance de vie.

Âge x	Survivants S_x	Décès $d(x, x + 1)$	Quotients q_x	Taux m_x	Espérance de vie	Âge x
0	100000	943	943	947	74,76	0
1	99057	77	78	78	74,47	1
2	98979	52	53	53	73,53	2
3	98927	38	39	39	72,57	3
4	98889	32	32	32	71,60	4
5	98857	37	37	37	70,62	5
6	98821	27	28	28	69,64	6
7	98793	29	29	29	68,66	7
8	98765	26	27	26	67,68	8
9	98739	25	25	25	66,70	9
10	98714	21	21	21	65,72	10
11	98693	26	27	27	64,73	11
12	98667	23	24	24	63,75	12
13	98643	30	31	31	62,76	13
14	98613	41	42	42	61,78	14
15	98571	46	47	47	60,81	15
16	98525	64	65	65	59,84	16
17	98461	81	82	82	58,87	17
18	98381	111	112	112	57,92	18
19	98270	117	119	119	56,99	19
20	98154	121	124	124	56,05	20
21	98032	119	121	121	55,12	21
22	97914	117	120	120	54,19	22
23	97796	108	110	110	53,25	23
24	97688	106	109	109	52,31	24
25	97582	110	113	113	51,37	25
26	97472	103	106	106	50,43	26
27	97369	105	108	108	49,48	27
28	97264	105	108	108	48,53	28
29	97159	104	107	107	47,58	29
30	97055	112	115	115	46,63	30
31	96943	114	118	118	45,69	31
32	96829	119	123	123	44,74	32
33	96710	119	123	123	43,79	33
34	96590	132	136	136	42,85	34
35	96459	140	145	145	41,91	35
36	96319	158	164	164	40,97	36
37	96162	167	174	174	40,03	37
38	95994	182	190	190	39,10	38
39	95812	208	217	217	38,17	39
40	95604	218	228	228	37,26	40
41	95386	224	235	236	36,34	41
42	95161	249	261	261	35,43	42
43	94913	285	300	301	34,52	43
44	94628	285	301	302	33,62	44
45	94343	331	351	352	32,72	45
46	94011	379	403	404	31,83	46
47	93632	396	423	424	30,96	47
48	93236	442	474	475	30,09	48
49	92794	494	532	533	29,23	49

TAB. 3.1 – Table de mortalité de l'année 1982, France.

Nous y voyons que la *racine* de la table, c'est à dire l'effectif initial de la cohorte fictive utilisée dans la simulation, a été choisi à 100 000. Les quotients sont souvent exprimés en pour dix mille.

3.6 Liaison entre mortalité et vieillissement d'une population

Comme la population française n'a qu'un taux de croissance très faible (moins de 0,05% au cours des dix dernières années), on pourrait la croire presque stationnaire¹⁹. On vient de voir qu'il n'en est rien. Il est tout à fait intéressant de confronter sa structure par âge telle qu'elle a pu être observée en 1975 à celle de la population stationnaire, déduite de la table de mortalité de la même année, et toutes deux à l'échelle des 52 millions de personnes recensées cette année là. On remarque immédiatement sur la figure 3.3 que la population française est beaucoup plus jeune que celle que les conditions actuelles de mortalité tendent à produire. On mesure ici l'effet du baby-boom qui a suivi la seconde guerre mondiale. Aux effectifs nombreux des moins de 30 ans nés après la guerre, s'opposent les générations âgées, d'effectifs faibles car nées dans une période de basse fécondité qui a été aggravée par les deux guerres mondiales.

Ces résultats réapparaissent sous un autre angle quand on superpose sur la figure 3.8, la distribution des décès réellement observés (figure 3.2) à celle des décès déduits de la table de mortalité (figure 3.6)²⁰. L'âge moyen des décédés de l'année 1975 (71,3 ans) est nettement inférieur à l'espérance de vie calculée plus haut (73,4 ans). Cela tient, encore une fois, au fait que la population Française de 1975 est plus jeune que la population stationnaire correspondant aux conditions de mortalité de 1975.

3.7 Mortalité du moment et mortalité réelle des générations²¹

La table de mortalité calculée à partir des décès enregistrés à l'état civil en 1975 et du recensement de la même année nous a permis d'isoler et de décrire avec précision le processus de mort auquel la population française se trouve actuellement soumise. Ce calcul peut être fait chaque année. Si nous nous livrons,

¹⁹Le raisonnement qui suit est particulièrement absurde pour un pays en pleine transition comme le sont la plupart des pays africains. Nous verrons alors qu'il faut confronter une population *stable* et non plus *stationnaire*.

²⁰ Le nombre des décès à chaque âge (autrement dit l'échelle de la distribution de la *table*), est celui qu'on obtiendrait à partir de la population stationnaire équivalente (52 millions). Notons que les décès de la *table* seraient dans ce cas plus nombreux, 718 050 contre 551 489 réellement observés (23% de plus).

²¹On peut se reporter à ce sujet aux publications de J. Vallin [53] : "La mortalité par génération en France, depuis 1899", Travaux et Documents, cahier n°63, Paris, INED-PUF, 1973, 484p, et "Tables de mortalité du moment et par génération", mise à jour provisoire du cahier n°63. Paris, INED, 1984, 3 volumes, d'où sont tirées les données utilisées ici.

Âge x	Survivants S_x	Décès $d(x, x + 1)$	Quotients q_x	Taux m_x	Espérance de vie	Âge x
50	92301	536	581	583	28,38	50
51	91764	567	618	620	27,55	51
52	91197	606	665	668	26,71	52
53	90591	659	728	731	25,89	53
54	89932	713	793	796	25,08	54
55	89218	761	852	856	24,27	55
56	88458	789	892	896	23,48	56
57	87669	833	950	955	22,68	57
58	86836	875	1008	1013	21,90	58
59	85961	922	1072	1078	21,11	59
60	85039	1006	1183	1190	20,34	60
61	84033	1071	1275	1283	19,58	61
62	82962	1242	1497	1484	18,82	62
63	81720	1140	1395	1397	18,10	63
64	80580	1265	1570	1581	17,35	64
65	79315	1321	1665	1680	16,62	65
66	77994	1338	1715	1713	15,89	66
67	76656	1656	2161	2147	15,16	67
68	75000	1616	2155	2179	14,48	68
69	73384	1753	2389	2417	13,79	69
70	71631	1855	2590	2622	13,12	70
71	69776	2001	2867	2908	12,45	71
72	67775	2143	3162	3213	11,80	72
73	65632	2357	3591	3656	11,17	73
74	63276	2454	3879	3957	10,57	74
75	60821	2668	4387	4486	9,98	75
76	58153	2777	4776	4892	9,41	76
77	55375	2974	5371	5519	8,86	77
78	52401	3130	5973	6155	8,33	78
79	49271	3249	6593	6813	7,83	79
80	46023	3345	7269	7539	7,35	80
81	42677	3518	8244	8595	6,89	81
82	39159	3505	8950	9354	6,46	82
83	35654	3557	9977	10488	6,05	83
84	32097	3521	10970	11602	5,66	84
85	28576	3463	12120	12907	5,30	85
86	25112	3307	13168	14116	4,96	86
87	21806	3187	14613	15766	4,63	87
88	18619	2965	15922	17303	4,34	88
89	15655	2666	17033	18667	4,07	89
90	12988	2455	18902	20963	3,80	90
91	10533	2218	21056	23639	3,57	91
92	8315	1805	21711	24373	3,39	92
93	6510	1477	22681	25432	3,19	93
94	5033	1250	24841	28553	2,98	94
95	3783	1044	27588	32042	2,81	95
96	2739	757	27617	33000	2,68	96
97	1983	513	25871	28538	2,52	97
98	1470	421	28630	35194	2,22	98
99	1049	225	21416	30396	1,91	99
100	824	167	20284	20367	1,30	100

TAB. 3.2 – Table de mortalité de l'année 1982 (suite), France.

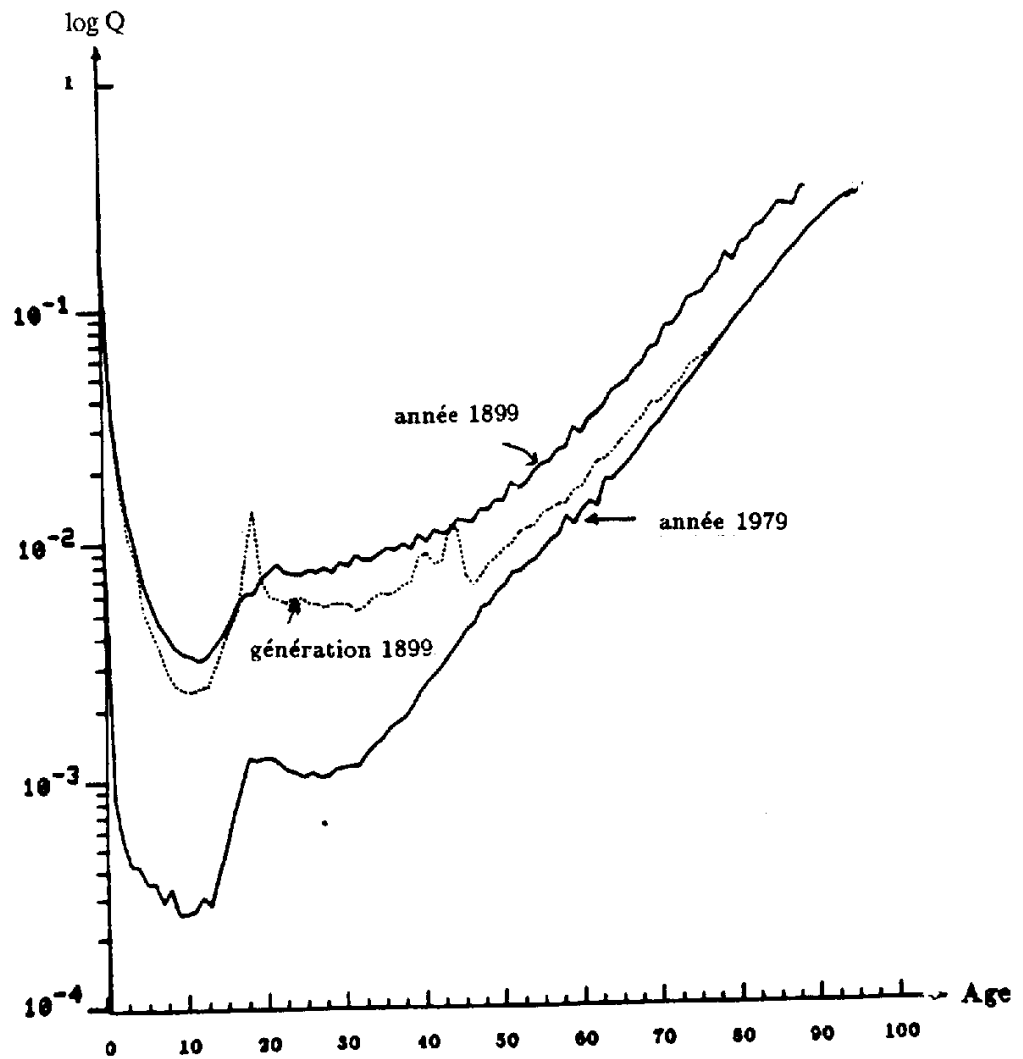


FIG. 3.8 – Superposition des distributions des décès bruts et déduits de la table de mortalité, France, 1975.

pour l'année 1899 (première année pour laquelle on dispose de statistique de décès par classe d'âge) au même exercice que précédemment, nous obtenons la figure 3.9.

On voit que la situation y était très différente puisqu'au début du siècle, les trois courbes (âge, vie restante et structure stationnaire) sont très voisines (indice de 103). Si la population de 1899 avait une structure plus jeune que celle de la population actuelle, c'est presque uniquement parce que la mortalité par âge y était plus élevée.

Pour apprécier les changements intervenus au cours du 20^e siècle, nous avons superposé sur la figure 3.10 la courbe des quotients par âge de l'année 1899, avec celle de l'année 1979, couvrant ainsi une période de 80 ans. Il apparaît clairement que la simulation effectuée sur les données de 1899 donne pour cette année là une mortalité nettement plus élevée que celle que subira réellement la génération des enfants nés en 1899.

Pour calculer la vie moyenne propre à cette dernière génération, on pourrait songer à retenir parmi les décès survenus chaque année depuis 1899, ceux qui concernaient cette seule génération, et à en calculer l'âge moyen. Mais la France a connu durant ces 80 ans d'importants flux migratoires. Il est donc nécessaire de passer une fois encore par la mesure des risques de décès à chaque âge. En calculant pour chaque année, comme nous l'avons fait pour 1975, les quotients de mortalité par âge, on peut ensuite regrouper les risques propres à une même génération et construire une table de mortalité d'un nouveau genre²². On appelle une telle table, *table de mortalité par génération* ou encore *table longitudinale de mortalité*, par opposition aux *tables de mortalité du moment* ou *table transversale de mortalité* qui décrivent les conditions de mortalité à un moment donné.

Une table longitudinale permet donc de suivre la résultante, pour une génération donnée, de deux phénomènes souvent opposés qui sont d'une part le vieillissement et d'autre part les progrès de la société en matière de santé, hygiène, médecine, développement, etc.

Nous avons ajouté à la figure 3.10 la courbe des quotients annuels de la génération 1899²³; outre que cette courbe a par définition la même mortalité infantile que la courbe transversale de 1899, et la même mortalité à 80 ans que celle de 1979, nous remarquons que les deux effets mentionnés plus haut se sont presque annihilés entre 25 et 35 ans, c'est à dire entre les années 1919 et 1939. A cette époque et ces âges là, plus l'on vieillissait, plus l'on avait de chance de survivre!

Revenons aux tables complètes de la figure 3.10 et remarquons combien la table longitudinale est plus heurtée que les tables transversales. En effet, hormis les guerres qui ne touchent que quelques classes d'âge et surtout les hommes, les petites crises ou épidémies conjoncturelles qui entravent la baisse générale de la mortalité, touchent toutes les générations; autrement dit les courbes de mortalité transversales qui peuvent être très différentes d'une année à l'autre, sont régulières avec l'âge²⁴ alors que les courbes longitudinales, subissant les divers

²²Plus exactement, on calcule la surface définie par la valeur de la force de mortalité à chaque âge x et chaque date t , soit $\mu(x, t)$. La force de mortalité, à l'âge x , associée à une génération née l'année t_0 est $\mu(x, t_0 + x)$.

²³En mettant à jour les données publiées dans J. Vallin, op. cit. [53].

²⁴Si elles ne le sont pas, c'est soit que les perturbations sont d'origine stochastique (effectifs

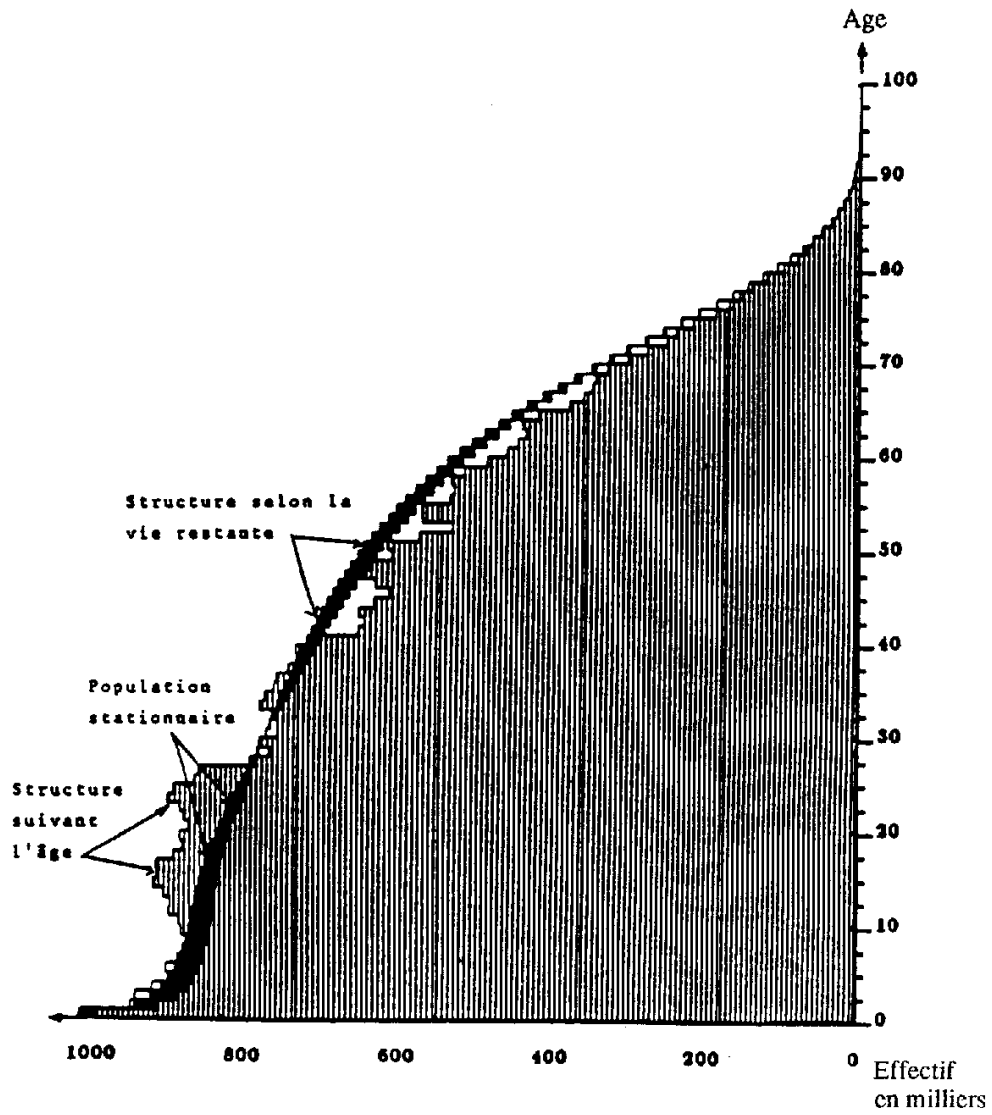


FIG. 3.9 – Même légende que pour la figure 3.3, mais pour l'année 1899.

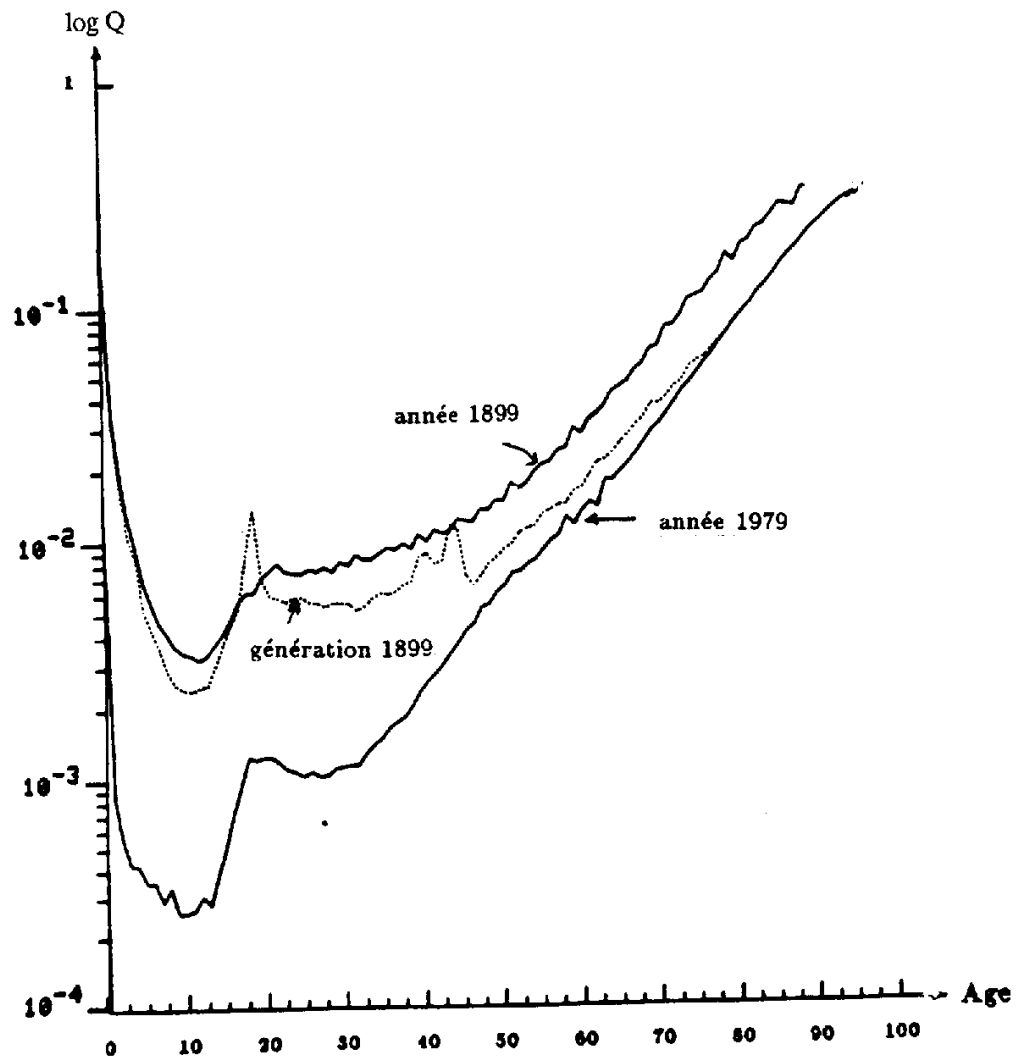


FIG. 3.10 – Risque de décès entre un anniversaire et le suivant, ou quotient de mortalité : année 1899 et 1979, et génération 1899, France

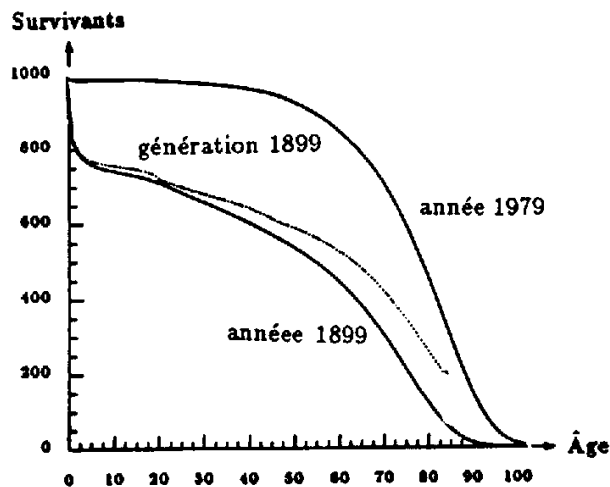


FIG. 3.11 – Nombre de survivants à chaque âge d'une cohorte de 1 000 individus, suivant que la mortalité est mesurée à deux dates différentes 1899 et 1979, ou pour la génération 1899, France.

événements des années successives, sont au contraire souvent perturbées. Ainsi, la grippe espagnole de 1918 qui a relevé la mortalité à tous les âges, laisse apparaître une courbe du moment très lisse, mais produit pour chaque génération une pointe de mortalité à l'âge atteint cette année là par la génération.

Finalement, si elle reflète avec exactitude les conditions de mortalité du moment et nous permet de suivre avec précision l'évolution de la mortalité, la table de mortalité transversale ne nous renseigne guère sur la mortalité réelle des générations. Ainsi, l'espérance de vie de l'année 1979, 74,15 ans, apporte peu d'information sur la mortalité des enfants nés cette année là puisque leur vie moyenne sera plus importante si la mortalité continue à baisser et qu'aucune crise ne vient remettre en cause ce progrès. Au contraire, les générations qui décèdent en grand nombre en 1979 auront eu une vie moyenne plus courte. L'âge moyen au décès de la *génération* 1899, par exemple aura été, lorsque les derniers survivants seront décédés, voisin de 50 ans, soit 26 ans de moins que celui donné par la table *transversale* de 1979. Notons cependant que l'espérance de vie de l'année 1899 n'était inférieure que de 5 ans à la vie moyenne réelle de la *génération* 1899; ceci résulte du fait qu'au début du siècle, la mortalité infantile encore très élevée pesait beaucoup dans le calcul de l'espérance de vie.

Pour nous en persuader, regardons non plus les courbes des quotients, mais les courbes de survie à chaque âge de la figure 3.11. Aux jeunes âges, celle de la *génération* 1899 suit longtemps la courbe transversale de la même année avant

trop petits), soit que le calcul du taux n'est pas correctement effectué. Ce dernier cas est possible lorsque les naissances ne sont pas uniformément réparties durant l'année, par exemple lors de la reprise des naissances durant l'année 1919, ou le départ au front en 1914.

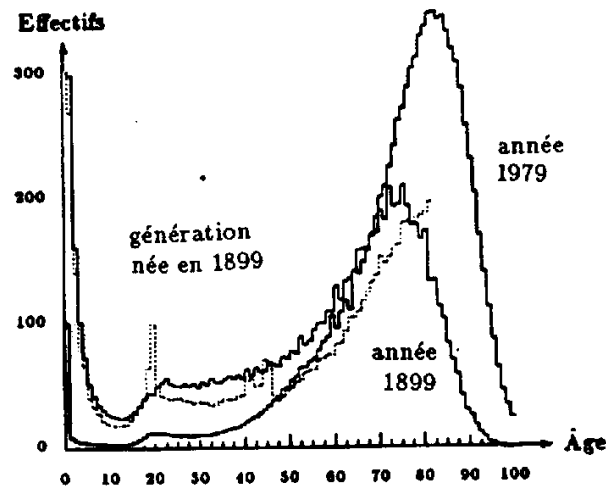


FIG. 3.12 – Distribution des décès de la génération née en 1899, ainsi que celles résultant des simulations effectuées avec les données de mortalité des années 1899 et 1979. France.

de s'en écarter définitivement aux âges adultes. Comme on montre également que, dans une table de mortalité, l'âge moyen au décès est aussi la valeur de l'aire limitée par la courbe des survivants, nous comprenons pourquoi la différence des espérances de vie est plutôt faible comparée à celle qui sépare la même génération 1899 et l'année 1979 puisqu'entre temps la mortalité infantile s'est effondrée. La figure 3.12 permet de comparer les courbes de décès et de confirmer d'une autre manière notre analyse.

L'intérêt des indices transversaux comme l'espérance de vie du moment, ne réside pas tant dans la valeur des résultats eux-même que dans l'analyse conjoncturelle et dans les comparaisons internationales précises qu'il permettent. Cependant, l'analyse transversale ne suffit pas à rendre complètement compte des ressorts de la mortalité, et une étude longitudinale est souvent indispensable pour interpréter correctement certains résultats, surtout en matière de cause de décès.

3.8 Un exemple d'interprétation difficile : la mortalité par cancer du poumon

Même si la mortalité totale évolue moins rapidement aujourd'hui, l'importance relative des causes de décès, nous le verrons, se modifient profondément. L'exemple suivant, tiré des travaux R. A. M. Case [11] montre dans ce contexte l'importance de l'analyse longitudinale.

3.8. UN EXEMPLE D'INTERPRÉTATION DIFFICILE : LA MORTALITÉ PAR CANCER DU POUMON 77

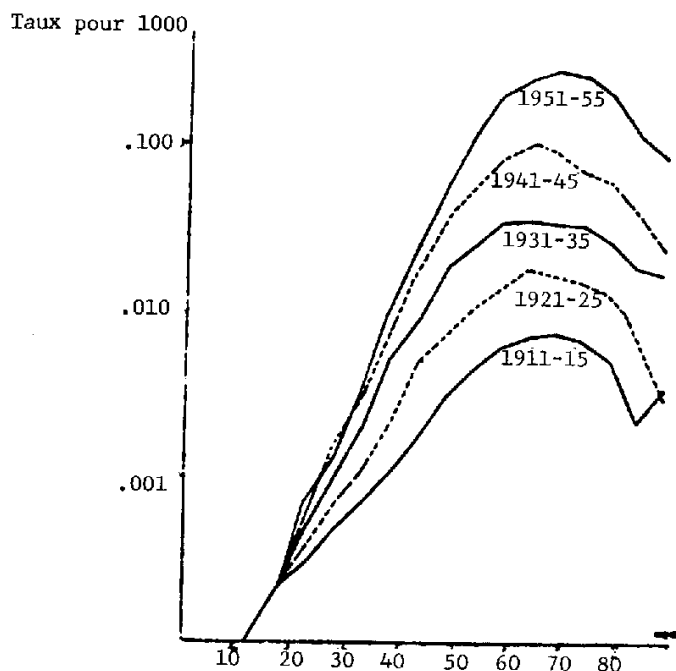


FIG. 3.13 – Taux de décès par cancer du poumon et de la plèvre par âge pour différentes périodes, hommes, Angleterre et Pays de Galles. Source :R.A.M., Case, op. cité.

La courbe supérieure de la figure 3.13 décrit le taux de mortalité par cancer du poumon et de la plèvre suivant l'âge, en Angleterre et au Pays de Galles, pour le dernier groupe d'années disponible à la date de la publication, c'est à dire pour la période 1951-1955. Un examen de cette seule courbe conduirait à conclure à l'existence d'un risque maximum aux âges de 65-70 ans. L'examen de la courbe *transversale* effectuée 10 ans plutôt, c'est à dire avec les données (décès et population par âge) de la période 1941-45, aurait conclu aussi à l'existence de ce maximum ; et il en est de même pour les période 1931-35, 1921-25 et 1911-15. L'erreur provient du fait que pour chaque *période*, les points correspondants aux âges ont été reliés entre eux, laissant entendre qu'ils avaient une relation entre eux : ils n'en ont guère car il s'agit de générations différentes, et les générations anciennes ne connaissaient pas ou peu de cas de cancer du poumon. Relions donc les points correspondants à une même génération, et nous obtenons (figure 3.14) les courbes des générations nées en 1866, 1876, 1886, 1896, et 1906. La mortalité par cancer du poumon croît donc avec l'âge ; simplement, le cancer du poumon est une maladie qui fait son apparition dans les nouvelles générations et ne peut pas être étudiée avec une simple coupe transversale.

On voit ainsi tout l'intérêt de l'analyse longitudinale trop souvent délaissée.

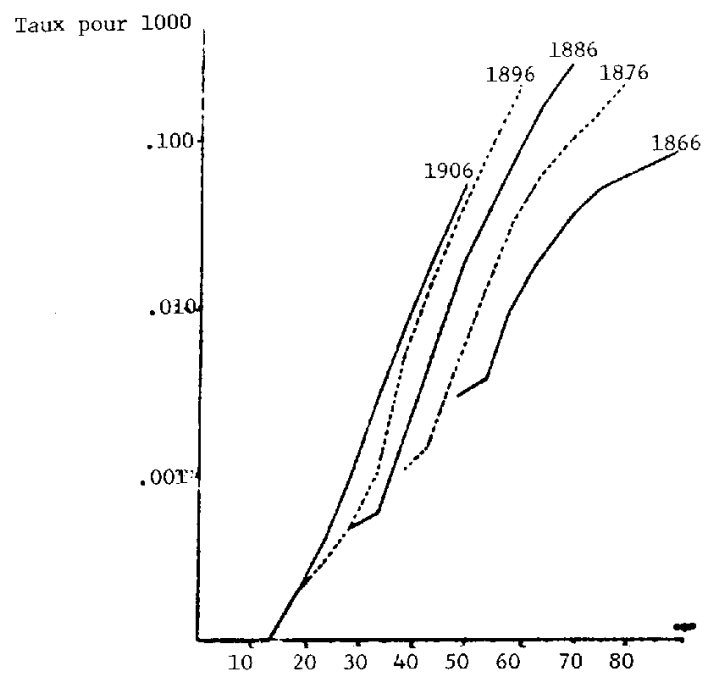


FIG. 3.14 – Taux de décès par cancer du poumon et de la plèvre par âge regroupement par génération, hommes, Angleterre et Pays de Galles. Source :R.A.M., Case, op. cité.

3.8. UN EXEMPLE D'INTERPRÉTATION DIFFICILE : LA MORTALITÉ PAR CANCER DU POUMON 79

La collation, souvent difficile, de longues séries statistiques est un investissement rentable, mais trop négligé.

L'analyse transversale a aussi, dans ce cas, son intérêt, mais il est d'un autre ordre : la courbe supérieure de la figure 3.13 nous indique, qu'effectivement, dans les services qui traitent le cancer du poumon, il y avait sans doute une part plus importante de personnes âgées de 65-70 ans²⁵ à traiter. Ce phénomène n'avait aucune origine d'ordre médicale ou génétique, mais résultait d'un mécanisme caché de la statistique. Ces périodes de transition, apparitions de maladies (cancers) ou disparitions (tuberculose) sont très fréquentes, et encore d'actualité avec certaines formes de cancer. Elles peuvent être de longue durée, puisque, comme on peut le voir sur cette même figure 3.13, le phénomène apparaissait déjà en 1913.

Nous avons tenté d'expliquer dans ce paragraphe les mécanismes fondamentaux d'analyse de la mortalité en introduisant la table de mortalité et ses deux facettes transversale et longitudinale. Il nous reste à approfondir les mathématiques d'une table de mortalité ; l'approche infinitésimale est la plus facile et la plus rigoureuse, nous l'étudions dans le chapitre suivant.

²⁵Il faudrait pour être précis regarder la courbe des décès par cancer du poumon et par âge, et non les taux par âge, ce qui aurait pour conséquence d'abaisser légèrement l'âge modal.

Chapitre 4

Approche infinitésimale de la mortalité

4.1 Calcul d'une table de mortalité en continu

4.1.1 Force de mortalité

Définition 8 On définit et note $\mu(x) dx$, la probabilité pour qu'un individu d'âge x décède entre les âges x et $x + dx$. μ est alors appelée force de mortalité selon le vocabulaire utilisé par Gompertz (1825) [22].

La probabilité de survivre entre les âge x et $x + dx$ pour un individu ayant atteint l'âge x est donc $1 - \mu(x) dx$.

Partant d'un âge origine 0, si $S(x)$ désigne la probabilité de survivre jusqu'à l'âge x , calculons la probabilité de survivre jusqu'à l'âge $x + dx$. La définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\Pr(A \text{ et } B) = \Pr(A) \times \Pr(B|A)$$

nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \Pr(\text{survie jusqu'à } x + dx) &= \Pr(\text{survie jusqu'à } x \text{ et survie entre } x \text{ et } x + dx) \\ &= \Pr(\text{survie jusqu'à } x) \times \Pr(\text{survie entre } x \text{ et } x + dx | \text{survie jusqu'à } x), \end{aligned}$$

soit finalement :

$$S(x + dx) = S(x)(1 - \mu(x) dx) \tag{4.1}$$

Cette équation différentielle s'intègre facilement :

$$\frac{S'(x)}{S(x)} = -\mu(x) \tag{4.2}$$

$$\text{d'où } S(x) = S(0)e^{-\int_0^x \mu(t) dt} \tag{4.3}$$

La valeur de $S(0)$ vaut 1, mais le terme figure d'une manière explicite dans l'équation 4.3 pour le cas où on choisit un âge autre que zéro comme *racine* de la table.

Désormais lorsque les bornes de l'intégration ne seront pas explicitées, il s'agira de l'intervalle $[0, \infty[$.

4.1.2 Distribution des décès

Partant d'un effectif de N individus à la naissance, $NS(x)$ désigne alors le nombre des survivants à l'âge x . Généralement on confondra la probabilité $S(x)$ avec les *survivants* à l'âge x faisant abstraction du facteur multiplicateur que constitue l'effectif¹ N . Ainsi l'équation 4.1 équivaut à : le nombre des survivants à l'âge $x + dx$, est égal au nombre des survivants à l'âge x diminué des décédés durant l'instant infinitésimal dx .

Partant d'un effectif unitaire $N = 1$, le nombre des décès attendus entre les âges x et $x + dx$, provient des $S(x)$ survivants à l'âge x et vaut $S(x)\mu(x) dx$.

La distribution des décès est donc la fonction $d(x) = S(x)\mu(x)$ qui vaut, en raison de l'équation 4.1

$$d(x) = -S'(x). \quad (4.4)$$

On vérifie que $\int_0^\infty d(x) dx = 1$.

4.1.3 Espérance de vie à la naissance

On résume généralement une distribution statistique par ses premiers moments, c'est à dire sa moyenne et son écart-type. L'espérance de vie, résumé de la distribution des décès est définie comme l'espérance mathématique de cette distribution. Ce résumé n'est d'ailleurs pas excellent dans le cas de la distribution des décès car celle-ci est fort éloignée d'une loi normale (qui est entièrement définie par ses deux premiers moments), et a en particulier 3 modes, un à la naissance, l'autre vers 20 ans et enfin le dernier entre 60 et 80 ans. La valeur du premier mode, $d(0) = \mu(0)$, n'est pas en général estimable, et seule la mortalité sur un intervalle fini, comme la mortalité avant un jour, une semaine, un mois ou une année peut être estimée. Les deux autres modes correspondent aux âges x où $d'(x) = 0$, soit aussi $S''(x) = 0$. Il s'agit donc des points d'inflexion de la fonction de survie (voir la figure 4.1).

Par définition, l'espérance de vie vaut :

$$e_0 = \int_0^\infty xd(x) dx \quad (4.5)$$

On va montrer en intégrant par partie l'équation ci-dessus que l'espérance

¹ Plus rigoureusement les *survivants* sont assimilés à l'espérance mathématique du nombre aléatoire de survivants

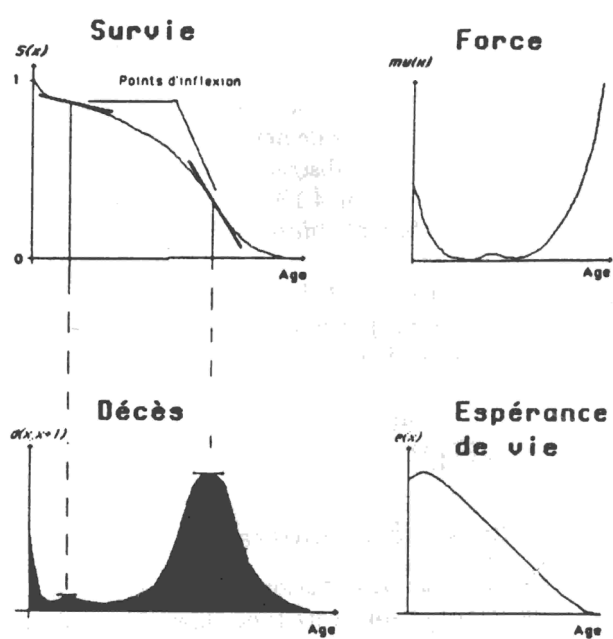


FIG. 4.1 – Distribution des décès, des survivants et de l'espérance de vie à chaque âge.

de vie est aussi l'intégrale de la fonction de survie $S(x)$. En effet :

$$e_0 = \int_0^{\infty} x d(x) dx \quad (4.6)$$

$$= -[xS(x)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -S(x) dx \quad (4.7)$$

$$e_0 = \int_0^{\infty} S(x) dx \quad (4.8)$$

Espérance de vie à un âge quelconque Soit $S(a)$ individus d'âge a , la moyenne des âges à leur décès est :

$$e_a = \int_a^{\infty} (x - a) d_a(x) dx \text{ avec}$$

$$d_a(x) = \frac{d(x)}{S(a)} = \frac{S(x)}{S(a)} \mu(x)$$

soit aussi :

$$e_a = \frac{1}{S(a)} \int_a^{\infty} S(x) dx \quad (4.9)$$

Quand la mortalité infantile est forte, l'espérance de vie à 1 an peut être plus grande que l'espérance de vie à la naissance, puisque dans ce cas $S(1)$ est faible.

4.1.4 Écart-type de l'âge au décès

Par définition l'écart-type, σ , de l'âge moyen au décès est égal à :

$$\sigma^2 = \int (x - e_0)^2 d(x) dx = \int x^2 d(x) dx - e_0^2. \quad (4.10)$$

Cet écart-type est très important. La distribution des décès d'une population humaine a le plus souvent trois modes : à la naissance, vers 20 ans puis à 60 ou 85 ans selon le niveau de la mortalité. Ainsi la distribution est fort éloignée d'une distribution normale qui peut se résumer par sa moyenne et son écart-type.

Lorsque la mortalité atteint des niveaux bas, seul le mode aux âges élevés domine et il est devenu légitime de résumer l'étendue de la durée de vie humaine par la règle des deux écart-types autour de la moyenne.

Cette étendue est extrêmement importante même si elle se resserre au fur et à mesure que la mortalité baisse.

Autrement dit, lorsque la mortalité baisse, les hommes vivent certes plus longtemps en moyenne mais ont surtout de plus en plus des durées de vie identiques. Nous assistons donc à une homogénéisation des histoires individuelles : il n'y a plus que de très rares décès d'enfants, ceux-ci perdent rarement leurs parents avant d'être eux-mêmes grands ; on connaît ses quatre grand-parents etc.

4.2 Population stationnaire

Définition 9 Une population stationnaire est une population dont :

1. la force de mortalité est indépendante du temps²
2. le nombre des naissances est constant par unité de temps.

Soit $N dt$ le nombre des naissances entre les instants $t - dt$ et t .

- Le nombre de lignes de vie, parmi les $N dt$, qui atteindront l'âge exact x entre les dates $t + x - dt$ et $t + x$ est donc $N dt S(x)$.
- Le nombre d'individus à la date $t + x$ d'âge compris entre x et $x + dx = x + dt$ est donc $N dx S(x)$, car les décès survenus durant cette durée infinitésimale sont des infiniments petits du deuxième ordre. Notons $P(x) dx$ la population âgée entre l'âge x et l'âge $x + dx$, elle vaut :

$$P(x) dx = N S(x) dx \quad (4.11)$$

et est indépendante du temps.

La population totale est donc :

$$P_{t+x} = \int_0^{\infty} P(x) dx = N \int_0^{\infty} S(x) dx, \quad (4.12)$$

soit, compte tenu de 4.8 :

$$P = N e_0. \quad (4.13)$$

Propriété 4.2.1 La population totale est constante et égale au produit du nombre instantané de naissances par l'espérance de vie à la naissance.

La structure par âge est :

$$C(x) dx = \frac{N S(x) dx}{N e_0} \quad \text{soit} \quad C(x) = \frac{S(x)}{e_0} \quad (4.14)$$

Il en résulte la propriété suivante :

Propriété 4.2.2 La pyramide des âges est indépendante du temps et sa structure est identique à celle des survivants à une constante multiplicative près ($1/e_0$).

Le taux brut de natalité, noté b , rapport des naissances dans l'instant dt à la valeur moyenne de la population à cette même date vaut donc :

$$b = \frac{N dt}{P dt} = \frac{1}{e_0} \quad (4.15)$$

Le taux de natalité b est égal à l'inverse de l'espérance de vie.

²Elle reste évidemment dépendante de l'âge.

Comme la taille de la population est constante, le taux de croissance instantané est nul ; le taux instantané de mortalité est donc lui aussi constant, et égal au taux de natalité. Vérifions ce résultat d'une autre manière : le nombre total des décès dans l'instant dt est la somme des décès survenus à tous les âges, soit :

$$\begin{aligned}
 d dt &= \int_0^{\infty} P(x) dx \mu(x) dt \\
 &= \int NS(x) \mu(x) dx dt \\
 &= \int NS'(x) dx dt \\
 &= N \int_0^{\infty} d[S(x)] dt \\
 &= N dt
 \end{aligned}$$

Propriété 4.2.3 *Le taux brut de mortalité est égal au taux brut de mortalité et vaut l'inverse de l'espérance de vie.*

Réciproquement, dans une population stationnaire où le taux brut de mortalité atteint 40 pour mille, par exemple, la durée de vie moyenne est de l'ordre de 25 ans.

4.2.1 Age moyen de la population stationnaire

Proposition 4.2.1 *L'âge moyen d'une population stationnaire n'est pas rigoureusement égal à la moitié de la durée moyenne de vie, mais lui est supérieur d'une quantité $\frac{\sigma^2}{2e_0}$, où σ est l'écart-type de l'âge au décès, quantité qui n'est pas négligeable en général :*

$$\bar{x} = \frac{e_0}{2} + \frac{\sigma^2}{2e_0} \quad (4.16)$$

Démonstration Par définition :

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{\int_0^{\infty} xP(x) dx}{\int_0^{\infty} P(x) dx} \\
 &= \frac{\int_0^{\infty} xS(x) dx}{\int_0^{\infty} S(x) dx} \\
 &= \frac{1}{e_0} \int_0^{\infty} xS(x) dx
 \end{aligned}$$

or en intégrant par partie, nous obtenons :

$$\int_0^{\infty} xS(x) dx = \left[-\frac{x^2}{2} S(x) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{x^2}{2} S'(x) dx,$$

soit encore en utilisant la relation 4.4

$$\int_0^{\infty} xS(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^2 d(x) dx,$$

comme de plus la variance de la distribution des décès vaut par définition :

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} (x - e_0)^2 d(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 d(x) dx - e_0^2,$$

nous avons finalement :

$$\bar{x} = \frac{e_0}{2} + \frac{\sigma^2}{2e_0}$$

Proposition 4.2.2 *L'âge moyen d'une population stationnaire est aussi égal à la moyenne des espérances de vie à chaque âge pondérées par l'effectif de la population à cet âge. Ainsi :*

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\infty} P(x)e(x) dx}{\int_0^{\infty} P(x) dx} \quad (4.17)$$

Démonstration Par définition : $\bar{x} = \frac{\int xP(x) dx}{\int P(x) dx} = \frac{N \int xS(x) dx}{\int P(x) dx}$, l'intégrale $\int xS(x) dx$ peut s'intégrer par partie de la manière symétrique à la proposition précédente :

$$x = u, \quad dv = S(x) dx$$

$$\text{d'où } dx = du \quad \text{et } v = \int_x^{\infty} S(t) dt = -e(x)S(x) dx.$$

Enfin :

$$\int_0^{\infty} xS(x) dx = [-xe(x)S(x)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e(x)S(x) dx = \int_0^{\infty} e(x)S(x) dx$$

et finalement

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\infty} e(x)P(x) dx}{\int_0^{\infty} P(x) dx},$$

ce qu'il fallait démontrer.

4.2.2 Pyramide des années à vivre

Théorème 4.1 *Dans une population stationnaire on peut dénombrer autant d'individus âgés de x années, que d'individus ayant x années à vivre.*

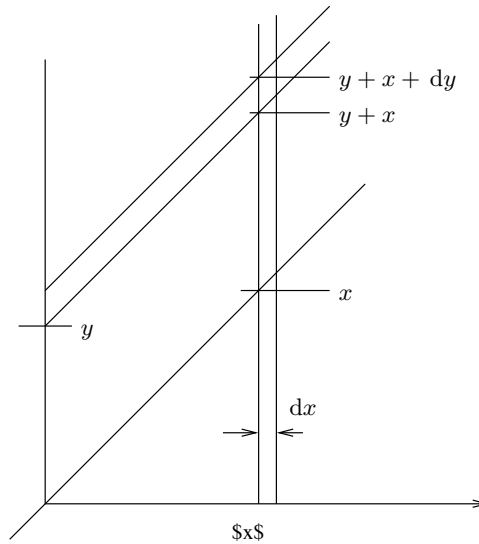


FIG. 4.2 – Diagramme de Lexis pour le calcul des décès.

Démonstration Dans une population stationnaire, le nombre d'individus âgés entre x et $x + dx$ années à un instant quelconque t est $P(x) dx = NS(x) dx$.

Il suffit de calculer le nombre de décès attendus entre les instants $t + x$ et $t + x + dx$, parmi la seule population présente à l'instant t , voir le diagramme de Lexis de la figure 4.2.

- sur les $P(y) dy = NS(y) dy$ individus présents à l'instant t , $NS(y) dy \times \frac{S(y+x)}{S(y)}$ survivront x années, et $NS(y) dy \times \frac{S(y+x)}{S(y)} \times \mu(y+x) dx$ décèderont entre les instants $t + x$ et $t + x + dx$.
- sur l'ensemble de la population présente à l'instant t , il suffit de sommer sur tous les âges y :

$$\begin{aligned}
 N \int_{y=0}^{\infty} S(y) dy \frac{S(y+x)}{S(y)} \mu(y+x) \times dx &= N \int_{y=0}^{\infty} S(y+x) \mu(y+x) dy \times dx \\
 &= -N \int_{y=0}^{\infty} S'(y+x) dy \times dx \\
 &= -N [S(x+y)]_{y=0}^{\infty} \times dx \\
 &= NS(x) \times dx
 \end{aligned}$$

Il est intéressant de tracer le graphe de la distribution de la population non pas suivant l'âge, mais suivant le délai qui lui reste à vivre ; nous pouvons représenter cette distribution sous la forme d'une pyramide et nous l'avons intitulée *pyramide des années à vivre*. La propriété démontrée ci-dessus s'énonce aussi :

Propriété 4.2.4 Dans une population stationnaire, la pyramide des âges et la pyramide des années à vivre sont identiques.

Exercice 11 Montrer que si la courbe de l'espérance de vie suivant l'âge a un maximum il est atteint pour un âge x vérifiant la relation :

$$\mu(x) = \frac{1}{e_x}$$

Solution 11 Par définition : $e(x) = \frac{1}{S(x)} \int_x^\infty S(t) dt$, ainsi, la dérivée $e'(x)$ vaut :

$$e'(x) = -\frac{S'(x)}{S(x)^2} \int_x^\infty S(t) dt + \frac{1}{S(x)} (-S(x)) = \mu(x)e(x) - 1$$

Elle s'annule bien pour la valeur :

$$\mu(x) = \frac{1}{e_x}.$$

4.2.3 Relations entre le taux de mortalité, la force et le quotient

Théorème 4.2 Le taux de mortalité, ${}_hM_x$, défini sur l'intervalle d'âge fini $[x, x+h]$ est voisin de la force de mortalité à l'âge médian, $x + \frac{h}{2}$.

$${}_hM_x \simeq \mu \left(x + \frac{h}{2} \right) \quad (4.18)$$

Relations exactes Rapellons, avec l'équation 4.1 que :

A revoir

$$S(x) = e^{-\int_x^{x+h} \mu(t) dt} \quad (4.19)$$

$$\text{et } {}_hM_x = \frac{S(x) - S(x+h)}{\int_x^{x+h} S(t) dt} \quad (4.20)$$

$$\text{enfin } {}_hq_x = 1 - e^{-\int_x^{x+h} \mu(t) dt} \quad (4.21)$$

$$= \int_0^h \mu(x+k) e^{-\int_x^{x+k} \mu(t) dt} dk \quad (4.22)$$

$$= \frac{S(x) - S(x+h)}{S(x)} \quad (4.23)$$

Démonstration du théorème La démonstration du théorème fait appel à deux approximations, ou plutôt à deux hypothèses de linéarité des fonctions S et μ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_x^{x+h} S(t) dt &\simeq h \frac{S(x)+S(x+h)}{2} \Rightarrow \frac{1}{h \times {}_hM_x} \simeq \frac{1}{{}_hq_x} - \frac{1}{2} \\ \int_x^{x+h} \mu(t) dt &\simeq h \mu \left(x + \frac{h}{2} \right) \Rightarrow \mu \left(x + \frac{h}{2} \right) \simeq \frac{1}{h} \log \left(\frac{1}{1-{}_hq_x} \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

La relation entre le taux et le quotient s'écrit aussi :

$${}_hM_x \simeq \frac{1}{h} \frac{{}_hq_x}{1 - \frac{{}_hq_x}{2}} \quad (4.25)$$

Montrons que les équations 4.24 et 4.25 ont même développement limité au second ordre en ${}_h q_x$. Rappelons en effet :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\Rightarrow -\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

Ainsi :

$${}_h M_x \simeq \frac{1}{h} \left[{}_h q_x + \frac{{}_h q_x^2}{2} + \frac{{}_h q_x^3}{4} + \dots + \frac{{}_h q_x^{n+1}}{2^n} + \dots \right] \quad (4.26)$$

$$\text{et } \mu \left(x + \frac{h}{2} \right) \simeq \frac{1}{h} \left[{}_h q_x + \frac{{}_h q_x^2}{2} + \frac{{}_h q_x^3}{3} + \dots + \frac{{}_h q_x^{n+1}}{n+1} + \dots \right] \quad (4.27)$$

4.3 Moments et cumulants

Soit F une loi de probabilité et $f(x)$ sa densité sur le domaine réel. Il est nécessaire de rappeler ici la définition de quelques fonctions très utiles en statistique et plus particulièrement dans le domaine démographique.

4.3.1 Fonction génératrice des fréquences

On note $P(t)$ la fonction génératrice des fréquences définie pour tout t réel par :

$$P(t) = \int t^x dF = \int f(x)t^x dx \quad (4.28)$$

Dans le cas où la distribution est discrète, la définition devient :

$$P(t) = \sum_r f_r t^r \quad \text{où } f_r = \Pr(F = r). \quad (4.29)$$

Ainsi, par exemple, dans le cas d'un tirage binomial de paramètre $p \in [0, 1]$ dans un échantillon de taille n , la *fréquence* de r vaut :

$$f_r = C_n^r p^r (1-p)^{n-r}$$

et la fonction génératrice des fréquences est :

$$P(t) = \sum_{r=0}^n C_n^r p^r (1-p)^{n-r} t^r = \{pt + (1-p)\}^n.$$

4.3.2 Fonction génératrice des moments

Il suffit de remplacer t par e^t dans la définition ci-dessus et on obtient la définition de la fonction génératrice des moments $M(t)$:

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{tx} dx. \quad (4.30)$$

Comme l'intégrale n'est pas toujours convergente, la fonction génératrice des moments n'est pas toujours définie. Il en est de même dans le cas discret car la série $e^{tr}f_r$ n'est pas non plus toujours convergente.

Effectuons maintenant le développement en série de e^{tx} :

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2x^2}{2!} + \cdots + \frac{t^nx^n}{n!} + \cdots$$

Sous la condition que la série $\frac{t^nx^n}{n!}f(x)$ soit uniformément convergente, on peut intégrer terme à terme la série entre des bornes finies :

$$M(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \left(\int_{-A}^A f(x)x^r dx \right). \quad (4.31)$$

Si chacune des intégrales existe lorsque A tend vers l'infini, c'est-à-dire si tous les moments non centrés de la distribution, $\mu'_r = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^r dx$, existent alors on peut écrire :

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{tx} dx \quad (4.32)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu'_r t^r}{r!}. \quad (4.33)$$

Relations entre les moments centrés et non centrés Par définition le moment d'ordre r s'écrit :

$$\mu'_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx \quad (4.34)$$

La moyenne μ'_1 s'écrit :

$$\mu'_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (4.35)$$

Le moment *centré* d'ordre r , μ_r , vaut par définition :

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu'_1)^r f(x) dx. \quad (4.36)$$

On note aussi :

$$\mu'_0 = \mu_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

En écrivant la relation :

$$\begin{aligned} x^r &= (x - \mu'_1 + \mu'_1)^r \\ &= \sum_{j=0}^r C_r^j (x - \mu'_1)^{r-j} \mu'^j_1, \end{aligned}$$

nous obtenons une expression des moments non centrés en fonction des moments centrés d'ordre inférieurs ainsi que de la moyenne μ'_1 :

$$\mu'_r = \sum_{j=0}^r C_r^j \mu'_{r-j} \mu'^j_1. \quad (4.37)$$

Ainsi pour les quatre premiers moments :

$$\begin{cases} \mu'_1 &= \text{moyenne} \\ \mu'_2 &= \mu_2 + \mu'^2_1 \\ \mu'_3 &= \mu_3 + 3\mu'_1\mu_2 + \mu'^3_1 \\ \mu'_4 &= \mu_4 + 4\mu'_1\mu_3 + 6\mu'^2_1\mu_2 + \mu'^4_1. \end{cases} \quad (4.38)$$

4.3.3 Fonction caractéristique

Au lieu de faire la transformation $t \rightarrow e^t$ il est préférable de faire la transformation $t \rightarrow e^{it}$; on obtient ainsi la fonction caractéristique $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx \quad (4.39)$$

Cette fonction a un intérêt plus grand que les précédentes car on montre qu'il y a bijection entre l'espace des distributions de probabilité et l'espace des fonctions caractéristiques. Autrement dit une fonction caractéristique $\Phi(t)$ est *caractéristique* d'une distribution de probabilité $f(x)$. Réciproquement une distribution de probabilité $f(x)$ est entièrement déterminée par sa fonction caractéristique $\Phi(t)$.

Propriété La fonction $\Phi(t)$ existe pour tout t . En effet :

$$|\Phi(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}| f(x) dx = 1$$

On peut alors intégrer ou dériver sous le signe intégral à condition que les expressions obtenues existent et soient uniformément convergentes. Ainsi la dérivée première s'écrit :

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = i \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} x f(x) dx \quad (4.40)$$

Soit pour $t = 0$:

$$\frac{d\Phi(0)}{dt} = i\mu'_1$$

De même

$$\mu'_r = (-i)^r \left[\frac{d^r \Phi(t)}{dt^r} \right]_{t=0}.$$

Une fonction caractéristique est donc aussi une fonction génératrice des moments.

4.3.4 Cumulants

Les premiers moments d'une distribution de probabilité sont des constantes utiles pour caractériser cette distribution mais ce ne sont pas les seules; en particulier on fait parfois appel aux *cumulants*, notés k_1, k_2, \dots, k_r , et définis en liaison avec les moments non centrés $\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_r$ par l'équation en t suivante :

$$\exp \left(k_1 t + \frac{k_2 t^2}{2!} + \dots + \frac{k_r t^r}{r!} + \dots \right) = 1 + \mu'_1 t + \frac{\mu'_2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\mu'_r t^r}{r!} + \dots \quad (4.41)$$

Si on prend it au lieu de t on obtient :

$$\exp \left(k_1 it + \frac{k_2 (it)^2}{2!} + \dots + \frac{k_r (it)^r}{r!} + \dots \right) = \quad (4.42)$$

$$1 + \mu'_1 it + \frac{\mu'_2 (it)^2}{2!} + \dots + \frac{\mu'_r (it)^r}{r!} + \dots = \quad (4.43)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx \quad (4.44)$$

$$= \Phi(t) \quad (4.45)$$

Le cumulant d'ordre r est alors le coefficient de $(it)^r / r!$ dans le développement en série de $\log \Phi(t)$ si celui-ci existe.

Un développement au premier ordre de l'équation 4.41 donne :

$$1 + k_1 t + \frac{k_2 t^2}{2!} + (k_1 t)^2 + \dots = 1 + \mu'_1 t + \frac{\mu'_2 t^2}{2!} + \dots,$$

d'où

$$\begin{aligned} k_1 &= \mu'_1, \\ k_2 &= \mu'_2 - \mu'^2_1 = \mu_2. \end{aligned}$$

Pour exprimer plus généralement les cumulants en fonction des moments, il convient de prendre le logarithme des deux membres de l'équation 4.41 et de développer en série :

$$k_1 t + \dots + \frac{k_r t^r}{r!} + \dots = \log \left(1 + \mu'_1 t + \dots + \frac{\mu'_r t^r}{r!} + \dots \right)$$

Ainsi en égalisant les termes en t^r :

$$k_r = r! \sum_{m=0}^r \sum_{\pi_1, \rho} \left(\frac{\mu'_{p_1}}{p_1!} \right)^{\pi_1} \dots \left(\frac{\mu'_{p_m}}{p_m!} \right)^{\pi_m} \frac{(-1)^{\rho-1} (\rho-1)!}{\pi_1! \dots \pi_m!} \quad (4.46)$$

où la seconde sommation s'effectue sur tous les $\pi_i \geq 0$ et sur $\rho \geq 0$ tels que :

$$\begin{aligned} p_1\pi_1 + p_2\pi_2 + \cdots + p_m\pi_m &= r, & \text{et} \\ \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_m &= \rho. \end{aligned}$$

Donnons alors les valeurs des 4 premiers cumulants en fonction des moments non centrés :

$$\begin{cases} k_1 &= \mu'_1 \\ k_2 &= \mu'_2 - \mu'^2_1, \\ k_3 &= \mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2\mu'^3_1, \\ k_4 &= \mu'_4 - 4\mu'_3\mu'_1 - 3\mu'^2_2 + 12\mu'_2\mu'^2_1 - 6\mu'^4_1. \end{cases} \quad (4.47)$$

Il est sans doute plus utile d'utiliser les moments centrés ; ainsi en vertu des relations 4.38 :

$$\begin{cases} k_1 &= \mu'_1 \\ k_2 &= \mu_2, \\ k_3 &= \mu_3, \\ k_4 &= \mu_4 - 3\mu_2^2. \end{cases} \quad (4.48)$$

4.4 Relations entre les moments et cumulants d'une table de mortalité

Soit $S(x)$ la fonction de survie et $\mathcal{S}(x) = \frac{S(x)}{e_0}$ la distribution normée telle que :

$$\int \mathcal{S}(x) dx = 1.$$

Cherchons alors le lien entre la f.g.m. de la distribution des survivants, \mathcal{S} et celle de la distribution des décès, d :

$$\phi(t) = \int e^{tx} \mathcal{S}(x) dx \quad (4.49)$$

$$\psi(t) = \int e^{tx} d(x) dx \quad (4.50)$$

avec $-\mathcal{S}'(x) = \frac{d(x)}{e_0}$.

Intégrons la seconde intégrale par partie (à condition de vérifier que chaque intégrale est convergente) :

$$\begin{aligned} \int e^{tx} d(x) dx &= [-\mathcal{S}(x)e_0e^{tx}]_0^\infty + e_0t \int e^{tx} \mathcal{S}(x) dx \\ &= 1 + e_0t\phi(t), \end{aligned}$$

soit finalement :

$$\psi(t) = 1 + e_0t\phi(t) \quad (4.51)$$

Développons les fonctions en série, nous trouvons :

$$1 + e_0 t \left(1 + \mu'_1{}^s t + \mu'_2{}^s \frac{t^2}{2!} + \dots \right) = \left(1 + \mu'_1{}^d t + \mu'_2{}^d \frac{t^2}{2!} + \dots \right)$$

En égalisant les coefficients en t^n :

$$\begin{aligned} \mu'_0 &= e_0 &= \mu'_1{}^d \\ e_0 \mu'_1{}^s &= \frac{\mu'_2{}^d}{2}, \\ &\cdot &= \cdot \\ e_0 \frac{\mu'_{n-1}{}^s}{(n-1)!} &= \frac{\mu'_n{}^d}{n!} \end{aligned}$$

Ainsi, pour les premiers moments, nous retrouvons d'une part que l'aire de la fonction de survie est égale à l'âge moyen au décès, et d'autre part que l'âge moyen d'une population stationnaire est égal à $\mu'_2{}^d / (2e_0)$ soit :

$$\mu'_1{}^s = \frac{1}{e_0} \left(\frac{\sigma^2 + e_0^2}{2} \right) = \frac{e_0}{2} + \frac{\sigma^2}{2e_0}.$$

Plus généralement, à l'ordre n :

$$\mu'_n{}^d = ne_0 \mu'_{n-1}{}^s \quad (4.52)$$

Exercice 12 Montrer que la fonction génératrice, $\xi(t)$, de l'espérance de vie à chaque âge vérifie la relation :

$$t^2 \xi(t) = e^{\omega t} - 1 + t \left[e(w) e^{\omega t} - e_0 - \int_0^\omega e^{tx} e(w) \mu(x) dx \right]. \quad (4.53)$$

Solution 12 On note, $e(x)$, l'espérance de vie à l'âge x :

$$e(x) = \frac{1}{S(x)} \int_x^\infty S(u) du.$$

Soit alors, $\xi(t)$, sa fonction génératrice des moments :

$$\xi(t) = \int e^{tx} e(x) dx.$$

En intégrant par partie cette équation, nous trouvons :

$$\begin{aligned} e'(x) &= \frac{-S(x)}{S(x)} - \frac{\int_x^\infty S(u) du}{S(x)^2} \\ &= -1 + \mu(x) e(x), \end{aligned}$$

$$\xi(t) = \left[\frac{1}{t} e^{tx} e(x) \right]_0^\omega - \frac{1}{t} \int e^{tx} e(x) \mu(x) dx,$$

soit encore

$$t^2 \xi(t) = e^{\omega t} - 1 + t \left[e(w) e^{\omega t} - e_0 - \int_0^\omega e^{tx} e(w) \mu(x) dx \right]. \quad (4.54)$$

Bibliographie

- [1] Berryman (Alan A.). – *Population System : A General Introduction*. – Plenum Press New York and London, 1981, *Population Ecology, Theory and Application*, 222p.
- [2] Blayo (Chantal). – Les interruptions volontaires de grossesse en France en 1976. *Population*, vol. 34, n°2, 1979, pp. 307–342.
- [3] Bourgeois-Pichat (Jean). – *Dynamique des populations*. – Institut d'Études Politiques, Paris, 1982, 150p. (Cours photocopié de DEA).
- [4] Brass (W.). – On the scale of mortality. *In : Biological Aspects of Demography*, éd. par Brass (W.). – London, 1971.
- [5] Brass (W.). – Use of the Logit System. *In : Methods for Estimating Fertility and Mortality from Limited and Defective Data*. – University of North Carolina. POPLAB Occasional Publications.
- [6] Brouard (N.) et Robine (J. M.). – Une modélisation du confinement à domicile. *In : Colloque Biologie théorique et médecine. Angers, 16–18 septembre 1986*. p. 20. – à paraître chez Cambridge Press.
- [7] Brouard (Nicolas). – Évolution de la fécondité masculine depuis le début du siècle. *Population*, n°6, 1976, pp. 1123,1156.
- [8] Brouard (Nicolas). – Espérance de vie active, reprises d'activité féminine : un modèle. *Revue économique*, vol. 31, n°6, Novembre 1980, pp. 1260–1287. – (numéro sur la démographie économique).
- [9] Brouard (Nicolas). – Comparaison de divers modèles de tables types de mortalité. *In : Séminaire sur les méthodes d'analyse et de collecte des données sur la mortalité. Dakar-Sénégal 7-10 Juillet 1981*. UIESP. – (communication non publiée).
- [10] Carrier (N.H.) et Hobcraft (J.). – Brass Model Life Table System. *In : Demographic Estimation for Developing Societies*. Population Investigation Committee. – London, 1971.
- [11] Case (R.A.M.). – Cohort analysis of mortality rates as an historical or narrative technique. *British journal of preventive and social medicine*, n°4, 1956, pp. 159–171.
- [12] Coale (A. J.). – Age pattern of marriage. *Population Studies*, vol. 25, n°2, July 1971, pp. 193–214.

- [13] Coale (A. J.) et Trussell (T. J.). – Model fertility schedules : Variation in the age structure of childbearing in human population. *Population Index*, vol. 40, n°2, Avril 1974, pp. 185–257.
- [14] Coale (Ansley J.) et Demeny (Paul). – *Regional Model Life Tables and Stable Populations*. – Princeton, N.J., Princeton University Press, 1966. (édition 1983, Academic Press).
- [15] Coale (Ansley J.) et MCNeil (D. R.). – The distribution by age of the frequency of first marriage in a female cohort. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 67, n°340, December 1972, pp. 743–749. – Applications Section.
- [16] Deparcieux (Antoine). – *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine, d'où l'on déduit la manière de déterminer les rentes viagères*. – Guérin frères, 1746. 2 parties en 1 vol. in-4 tabl.
- [17] Easterlin (Richard A.). – The current fertility decline and projected fertility changes. In : *Population, Labor Force, and Long Swings in Economic Growth : The American Experience*, chap. 5. – New York, Columbia University Press, 1968.
- [18] Elsek (G. D.) et Baumgardner (K. D.). – *Population Biology*. – D. Van Nostrand Company, 1981, 620p.
- [19] Euler (Léonard). – Sur les rentes viagères. In : *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres*. pp. 165–175. – Berlin, 1760.
- [20] Gause (G. F.). – *Vérifications expérimentales de la théorie mathématique de la lutte pour la vie*. – Paris, Hermann éditeur, 1935, *Actualités Scientifiques et Industrielles*, 62p.
- [21] Gendreau (Francis). – *Mouvements et modèles de populations. Cours*. – I.Fo.R.D., Yaoundé, Cameroun, Février 1976.
- [22] Gompertz (B.). – On the nature of function expressive of the law of human mortality. *Philosophical Transactions*, vol. XXVII, 1825, p. 513 sqq.
- [23] Graunt (John). – *Observations Naturelles et Politiques en rapport avec le gouvernement, la religion, le commerce, l'accroissement, l'atmosphère, les maladies et les divers changements de ladite cité*. – Paris, INED, 1977, 174p. (édition critique et traduction par Eric Vilquin de la version anglaise publiée à Londres en 1662).
- [24] Halley (Edmund). – An estimate of the degrees of the mortality of mankind. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, vol. 17, 1693. – (traduit par Jacques Dupâquier dans les *Annales de démographie historique*).
- [25] Hardy (A. C.). – The herring in relation to its animate environment. *Ministry and Fishery Investigations*, vol. 7, n°3, 1924. – Part 1, Serie 2.
- [26] Henry (Louis). – Some data on natural fertility. *Eugenics quarterly*, vol. 18, n°2, 1961, pp. 81–91.
- [27] Henry (Louis). – Reflexions sur les taux de reproduction. *Population*, n°1, 1965, pp. 53–76.

- [28] Henry (Louis). – Perturbation de la nuptialité résultant de la guerre 1914–1918. *Population*, 12, 1966, pp. 273–332.
- [29] Henry (Louis). – *Démographie, analyse et modèles*. – Paris, Larousse, 1972, *Sciences humaines et sociales*.
- [30] Henry (Louis). – *Technique d'analyse en démographie historique*. – Paris, INED, 1980, 180p.
- [31] Hoem (J. M.) et Fong (M.). – A markov chain model of working life tables. *Laboratory of actuarial mathematics*, 1976. – WP 38.
- [32] Kersseboom (Willem). – *Essai d'arithmétique politique contenant trois traités sur la population de la province de Hollande et Frise Occidentale la durée de survie des veuves, la durée des mariages la relation entre la population et le nombre des naissances, le nombre de couples, etc.* – Paris, INED, 1970. (traduction par l'Union Internationale pour l'Étude Scientifique de la Population des traités originaux publiés à La Haye en 1742).
- [33] Keyfitz (Nathan). – *Introduction to the mathematics of population*. – Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1968.
- [34] Kincannon (Louis) et Banister (Judith). – Perspectives on china. *US Bureau of the Census*, 1984.
- [35] Lederman (Sully). – *Nouvelles tables-types de mortalité*. – Paris, PUF, 1969, *INED, Travaux et Documents*.
- [36] Lederman (Sully) et Brèas (Jean). – Les dimensions de la mortalité. *Population*, 11, 1959.
- [37] Lexis (W.). – *Einleitung in die Theorie der Bevölkerungs-Statistik*. – Strasbourg, Trubner, 1875.
- [38] Locoh (Thérèse). – *Fécondité et famille en Afrique de l'Ouest, le Togo méridional contemporain*. – Paris, PUF, 1984, *Cahier des "Travaux et Documents" de l'INED*.
- [39] Lotka (A. J.). – *Théorie analytique des associations biologiques. Première partie*. – Paris, Hermann éditeur, 1934, *Actualités Scientifiques et Industrielles*.
- [40] Léridon (H.) et Charbit (Y.). – *Transition démographique et modernisation en Guadeloupe et en Martinique*. – Paris, PUF, 1980, *Cahier des "Travaux et Documents" de l'INED*.
- [41] Léridon (H.), Sardon (J.P.), Collomb (Ph.) et Charbit (Y.). – La contraception en France en 1978 – une enquête de l'INED–INSEE. *Population*, 134, décembre 1979. – (nspécial).
- [42] Malthus, Robert (Thomas). – *Essai sur le principe de population en tant qu'il influe sur le progrès futur de la société, avec des remarques les théories de Mr Godwin, de M. Condorcet et d'autres auteurs*. – Paris, INED, 1980. (traduction par Éric Vilquin de la première édition de 1798. Londres).
- [43] Nizard (Alfred) et Vallin (Jacques). – Influence du développement sur la mortalité différentielle. In : *Congrès International de la Population, Mexico 1977*. UIESP, pp. 441–481. – Liège, 1977.

- [44] ONU (édité par). – *Model life tables for developing countries*. – New-York, United Nations, 1982, *Population Studies*.
- [45] Pearl (R) et Parker (S. L.). – On the influence of density of population upon the rate of reproduction in *Drosophila*. *Proceeding national Academic Science*, vol. 8, 1922, pp. 212–219.
- [46] Pison (Gilles). – *Dynamique d'une population traditionnelle : les Peul Bandé (Sénégal Oriental)*. – Paris, PUF, 1983, *Cahier des "Travaux et Documents" de l'INED*.
- [47] Pollard (J.H.). – *Mathematical models for the growth of human populations*. – Cambridge, Cambridge University Press, 1973, 2^e édition, 186p.
- [48] Pressat (Roland). – Les tables en démographie : une notion confuse. *Population et famille*, n°1, 1975, pp. 67–80.
- [49] Rasor (E. A.). – The fitting of logistic curves by means of a nomograph. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 44, n°248, 1949, pp. 548–553.
- [50] Samuelson (Paul A.). – Resolving a historical confusion in population analysis. *Human Biology*, vol. 48, 1976, pp. 559–580.
- [51] Spurr (W. A.) et Arnold (D. R.). – A short-cut method of fitting a logistic curve. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 43, n°241, 1948, pp. 127–134.
- [52] Valaoras (V.). – *Schémas de variations de la mortalité selon l'âge et le sexe, tables types de mortalité pour les pays sous-développés*. – New-York, Nations-Unies, 1955, *Population Studies*, 30p.
- [53] Vallin (Jacques). – *La mortalité par génération en France, depuis 1899*. – Paris, PUF, 1973, *INED, Travaux et Documents*.
- [54] Verhulst (P. F.). – Notice sur la loi que suit la population dans son accroissement. *Correspondance Mathématique et Physique.*, vol. 10, 1838, pp. 113–121.
- [55] Volterra (Vito) et d'Ancona (Umberto). – *Les associations biologiques au point de vue mathématique*. – Paris, Hermann éditeur, 1935, *Actualités Scientifiques et Industrielles*.
- [56] Wargentin (Per). – Mortaliteten i sverige, i anledning af tabell-verket. (*de la mortalité en suède, d'après la méthode des tableaux.*). *Kongl. Svenska Vetenskap Academiens Handlingar för år 1766*, vol. XXVII, janvier-mars 1766, pp. 1–25. – Traduction et analyse de Jacques Dupâquier dans *Annales de démographie historique*. 1977, pp. 385–420.

Table des figures

1.1	Définition d'un taux sur un domaine quelconque du diagramme de Lexis.	8
1.2	Diagramme de Lexis montrant les différents événements démographiques qui concourent aux variations de la population totale entre deux dates.	9
1.3	Graphe de la taille d'une population en fonction du temps, agrandie "à la loupe" jusqu'à ce que le processus élémentaire de vie ou de mort apparaisse.	11
1.4	Equivalence au premier ordre des flux de lignes de vies traversants un segment horizontal et un segment vertical de même taille élémentaire.	12
1.5	Champs de vecteur population.	12
1.6	Formule d'Ostrogradsky à deux dimensions	13
1.7	Le nombre d'années-vécues par l'ensemble de la population entre les deux dates est aussi égal à la surface hachurée.	15
1.8	Différents modes de calcul d'un intérêt pour une même valeur du taux, ici de 6,5% annuel.	20
1.9	Temps intermédiaires.	24
2.1	Dépendances mutuelles des espèces biologiques. Source : A. J. Lotka.	29
2.2	Le hareng et les espèces qui lui servent directement ou indirectement de nourriture. Travail effectué par A.J. Lotka d'après A. C. Hardy.	30
2.3	Diagrammes représentant plusieurs types d'états stationnaires dans un système comprenant deux espèces biologiques.	32
2.4	Population logistique : représentation de P en fonction du temps. (Partie A).	36
2.5	Population logistique : représentation de P' et P'' en fonction de P . (Partie B).	37
2.6	Définition d'un équilibre stable et asymptotiquement stable.	40
2.7	L'espèce 2 disparaît.	44
2.8	L'espèce 1 disparaît.	44
2.9	Équilibre stable entre les deux espèces.	45
2.10	Équilibre instable.	45

2.11	Modèles proie-prédateur ou hôte-parasite.	48
2.12	Modèles proie-prédateur ou hôte-parasite. Évolution des effectifs en fonction du temps ainsi que des taux de croissance.	49
3.1	Évolution du taux brut de mortalité en France depuis 1740.	56
3.2	Distribution des 551 489 décédés en France durant l'année 1975 en fonction de leur âge.	60
3.3	Structure par âge de la population française au milieu de l'année 1975. Population stationnaire de même effectif déduite de la mortalité mesurée la même année.	62
3.4	Risques de décès suivant l'âge en 1975 : taux de mortalité, échelle arithmétique. France.	63
3.5	Probabilités de décès entre un anniversaire et le suivant. Quotients annuels par âge, 1975, France (échelle logarithmique).	64
3.6	Distribution des âges au décès d'une cohorte de 1000 nouveau-nés soumise aux risques de décéder par âge mesurés en 1975	65
3.7	Fonction de survie déduite des quotients de mortalité mesurés en 1975. France.	65
3.8	Superposition des distributions des décès bruts et déduits de la table de mortalité, France, 1975.	70
3.9	Même légende que pour la figure 3.3, mais pour l'année 1899.	73
3.10	Risque de décès entre un anniversaire et le suivant, ou quotient de mortalité : année 1899 et 1979, et génération 1899, France	74
3.11	Nombre de survivants à chaque âge d'une cohorte de 1 000 individus, suivant que la mortalité est mesurée à deux dates différentes 1899 et 1979, ou pour la génération 1899, France.	75
3.12	Distribution des décès de la génération née en 1899, ainsi que celles résultant des simulations effectuées avec les données de mortalité des années 1899 et 1979. France.	76
3.13	Taux de décès par cancer du poumon et de la plèvre par âge pour différentes périodes, hommes, Angleterre et Pays de Galles. Source :R.A.M., Case, op. cité.	77
3.14	Taux de décès par cancer du poumon et de la plèvre par âge regroupement par génération, hommes, Angleterre et Pays de Galles. Source :R.A.M., Case, op. cité.	78
4.1	Distribution des décès, des survivants et de l'espérance de vie à chaque âge.	83
4.2	Diagramme de Lexis pour le calcul des décès.	88
5.1	Série des naissances depuis le début du siècle	96
5.2	Evolution du taux de fécondité des femmes âgées entre 15 et 49 ans en France.	97
5.3	Pourcentage de naissances dont la mère n'est pas mariée (naissances "illégitimes").	100

5.4	Distributions des naissances de l'année 1974 en France suivant l'âge du père et l'âge de la mère.	100
5.5	Taux de fécondité générale suivant l'âge de l'homme et de la femme. France 1974.	101
5.6	Fécondité générale par âge chez les Peuls-Bandé.	102
5.7	Évolution de l'intensité de la fécondité annuelle depuis le début du siècle.	104
5.8	Évolution récente de la fécondité féminine dans les pays développés.	106
5.9	Fécondité par âge et par sexe pour quelques générations. France.	108
5.10	Fécondité par âge et par sexe pour quelques générations. France. (suite).	108
5.11	Proportion de célibataires pour les générations ayant connu la guerre de 1914-18. Différence entre les hommes et les femmes. France.	109
5.12	Descendance atteinte à divers âges et descendance finale par génération. Hommes. France.	111
5.13	Descendance atteinte à divers âges et descendance finale par génération. Femmes. France.	112
5.14	Distribution des familles complètes suivant leur taille pour différentes générations de mères.	113
6.1	Évolution de différents indices de reproduction par génération. France. Femmes.	122
6.2	Génération des mères et des filles : reproduction à 15 ans.	123
6.3	Diagramme de Lexis, présentation du théorème sur les années vécues.	125
8.1	Proportion de non-célibataires suivant l'âge, quelques populations choisies.	142
8.2	Distribution des premiers mariages pour différentes cohortes en Suède.	143
8.3	Quotients de primo-nuptialité, calculés rétrospectivement à partir d'une cohorte de non-célibataires définitifs.	145
8.4	Comparaison de la distribution observée des premiers mariages en Suède (translatée de la valeur du premier âge au mariage) (Femmes 1865-1869) et de la distribution standard.	145
8.5	Valeurs de la fécondité naturelle, $n(a)$ (échelle arithmétique), ainsi que de la fonction de déformation $\nu(a)$ (échelle logarithmique).	147
8.6	Valeurs de $m = \log[r(a)/(M.n(a))]/\nu(a)$ pour différents profils de fécondité légitime par âge a	148
8.7	Taux de fécondité observés et ajustés pour la Hongrie (1970), le Japon (1964) et la Suède (1891-00).	148
8.8	Effets de la contraception ($m = 0$ et 2) sur la somme des naissances réduites, pour une population où $C = 1$ et $k = 0, 4$	149

Liste des tableaux

1.1	Différence entre un <i>taux</i> instantané et un <i>pourcentage</i> d'accroissement.	19
1.2	Production d'un travailleur dans l'agriculture en France de 1750 à 1980.	22
3.1	Table de mortalité de l'année 1982, France.	67
3.2	Table de mortalité de l'année 1982 (suite), France.	69
6.1	Calcul de la reproduction à partir de la table de mortalité et des taux de fécondité. Population des Peuls Bandé (Sénégal Oriental).	117
6.2	Résumé synthétique des étapes pour le calcul du taux de croissance de la population des Peul Bandé.	120
7.1	Logits des quotients moyens propres à chacune des 4 régions définies par les Nations-Unies.	135
7.2	Valeurs des trois premières composantes principales qui génèrent les nouvelles tables des Nations-Unies.	136
7.3	Ajustement d'une table de mortalité où un quotient est manquant à un modèle de table type.	138
8.1	TAUX DE FÉCONDITÉ NATURELLE ET VALEURS PROPOSÉES POUR LA DÉFORMATION LORSQUE LA FÉCONDITÉ EST CONTROLÉE.	147

Index

densité, 11
Domaine (de Lexis), 7

Fréquence, 9

Lexis, 7
Lexis (domaine de), 7
Ligne de vie, 7

Mortalité, taux, 9

Ostrogradsky (formule d'), 13

Taux, 9
Taux de mortalité, 9

...the ...

...the ...

...the ...

...the ...

...the ...

...the ...

...the ...

...the ...

...the ...

...the ...

...the ...

...the ...

...the ...

...the ...

...the ...

...the ...

...the ...

...the ...

...the ...