Mimeographed document on the « Pyramide de survie ».

The official reference of this document is "Document pédagogique de l'Institut de formation et de recherches démographiques (IFORD/Nations Unies , Yaoundé, Cameroun) N°60. DED.2. Février 1984, Année universitaire 1983-1984. Nicolas Brouard. Corrigé des Travaux Dirigés N° 2. 8p."

This exercise is the "discrete" version of the theorem on the equality of the time lived and time left in stationary population and its property which will be published in 1989 in the book « Mouvements et modèles de population »

The students of Iford did not all master integration and demographic concepts in continuous time. Therefore in the early years of my lecture (since 1980), I was teaching demography in discrete time. But with the notion of Population Vector and Population Density, I moved to continuous time

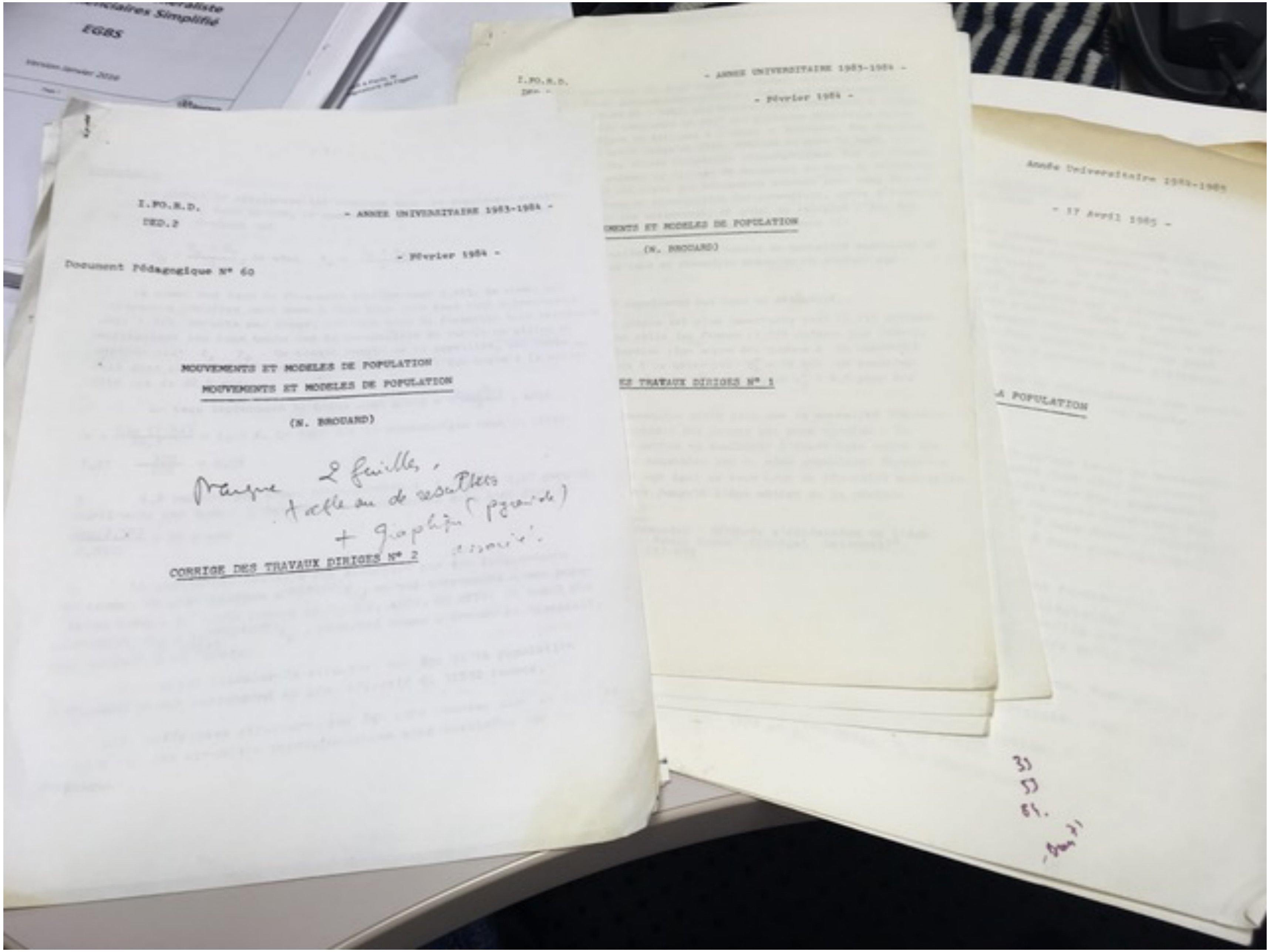
At this time of February 1984, I called "pyramide de survie" what I will call "pyramide des années à vivre" in the 1986 publication.

You will see that the exercise also addresses the stable populations by providing a simple formulation where Tx is the classical accumulation of populations by five-year age (a=5), and r is the growth rate. I am attaching an OpenOffice spreadsheet to check the former calculations. In Feb 1984, spreadsheets did not exist or were just starting and I did the computations in Fortran at Ined on the first Vax DEC computers. Unfortunately, all my old computer programs are lost. I still have some magnetic tapes… This is the reason why Tx is shifted up of one age group (easier to print in Fortran in one loop).

At the end of the exercise, I approached the limit of the time left pyramid of a stable population which tends to the distribution of deaths (of the life table) when growth tends to infinity.

The PDF includes three documents :

1. a photo of the mimeographed documents of IFord that I found in my archives in January 2018 at INED ;
2. The correction of the Travaux dirigés N°2. Unfortunately, I do not have the statement of this Travaux dirigés N° 2, but only its correction.
3. The LaTeX version in French of this TDN°2 with less typographical errors (January 2018);
4. The LaTeX version in English of this TD N°2 (January 2018).


I.FO.R.D.
DED.2
- ANNEE UNIVERSITAIRE 1983-1984 -
- Février 1984 -
Document Pédagogique N° 60
MOUVEMENTS ET MODELES DE POPULATION
(N. BROUARD)
Manque 2 feuilles, tableau de résultats + graphique (pyramide) associé.
CORRIGE DES TRAVAUX DIRIGES N° 2
I.FO.R.D.
- ANNEE UNIVERSITAIRE 1983-1984 -
- Février 1984 -
MENTS ET MODELES DE POPULATION
(N. BROUARD)
ES TRAVAUX DIRIGES N° 1
Année Universitaire 1984-1985
- 17 Avril 1985 -
LA POPULATION
33
53
61.

I.FO.R.D. - ANNEE UNIVERSITAIRE 1983-1984 -

DED.2

- Février 1984 -

Document Pédagogique N° 60

MOUVEMENTS ET MODELES DE POPULATION

MOUVEMENTS ET MODELES DE POPULATION

(N. BROUARD)

Manque 2 feuilles, tableau de résultats + graphique (pyramide) [illegible]

CORRIGE DES TRAVAUX DIRIGES N° 2

Exercice I

1. Le nombre de naissances est constant dans une population stationnaire. Si S_0 vaut 10 000, le nombre des jeunes filles ayant entre 0 et 4 ans révolues est

$$Z_0 = \frac{S_0 + S_5}{2}, \text{ de même } \quad Z_x = \frac{S_x + S_{x+5}}{2}.$$

2 - La somme des taux de fécondité par âge vaut 1,143, la somme des naissances réduites vaut donc 5 fois plus (les taux sont quinquennaux) soit 5,715 enfants par femme. Les taux nets de fécondité sont obtenus en multipliant les taux bruts par la probabilité de survie en milieu de période soit $Z_x \cdot F_x$. En tenant compte de la mortalité, une femme ne fait donc plus que 5,21 enfants en moyenne, et l'âge moyen à la maternité est de 28,8 ans.

Le taux instantané de Lotka vaut alors $r = \frac{\text{Log}(R_0)}{a}$, soit $r = \frac{\text{Log}\ (2,54)}{28,8} = 3,23\ \%$. Le taux net de reproduction vaut en effet $5,21 \cdot \frac{100}{205} = 2,54$

3. 6,2 enfants par homme correspondent à $6,2\ \frac{105}{205} = 3,17$ garçons survivants par homme. L'âge moyen à la paternité doit donc être de $\frac{\text{Log}(2,54)}{0,0323} = 35,8$ ans

4. La population stable a une structure par âge indépendante du temps. On peut prendre $e^{-r(+a/2)} Z_x$, ce qui correspond à une population totale de 51502 femmes ($r=0,0322$, $a=5$). En effet le cumul des effectifs ; $T_x = \sum_{y=x+5} e^{-r(y+a/2)} Z_y$, présenté comme l'énoncé le demandait, nous conduit à ce chiffre.

On a aussi calculer la structure par âge de la population stationnaire qui correspond au même effectif de 51502 femmes.

Les différentes structures par âge sont données dans le tableau ci-joint et les pyramides correspondantes sont dessinées sur le graphique.

5. . Si le taux de croissance est nul la population est stationnaire. Si à l'instant t, la structure par âge est Z_x 5 années plus tard, les Z_x femmes âgées entre x et x+4 années (révolues), ne seront plus que Z_{x+5}. A l'instant t, $Z_x - Z_{x+5}$ décès de femmes sont donc attendus dans les 5 ans. La somme des décès attendus avant cinq années est donc :

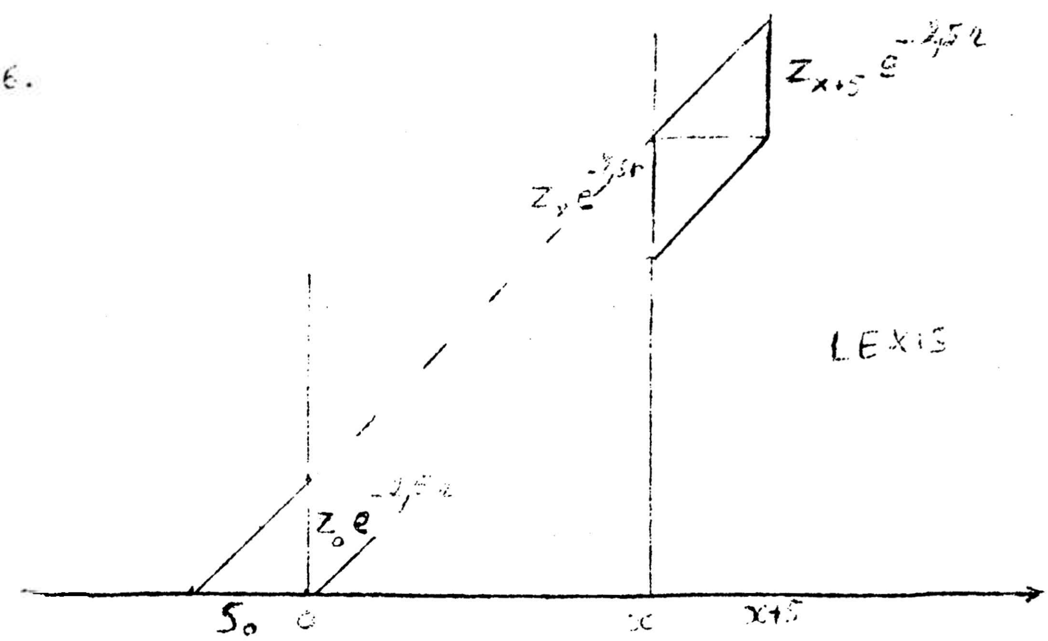
$Y_0 = Z_0 - Z_5 + (Z_5 - Z_{10}) + \ldots = Z_0$, celle des décès attendus entre 5 et 10 ans est de même :

$Y_5 = (Z_5 - Z_{10}) + (Z_{10} - Z_{15}) + \ldots = Z_5$ etc.

<u>Propriété</u>

Dans une population stationnaire on dénombre autant d'individus ayant vécus x années que d'individus ayant x années à vivre.

6.



Entre x et x+5 années et parmi les $Z_o e^{-r/2}$ femmes de la population stable âgées entre o et 4 ans révolues, on décomptera $(Z_x - Z_{x+5})e^{-r5/2}$ décès. La somme des décès escomptés est donc :

$$Y_x + (Z_x - Z_{x+5})e^{-r5/2} + (Z_{x+5} - Z_{x+10})e^{-r(5+5/2)} + (Z_{x+10} - Z_{x+15})e^{-r(10+5/2)} + \ldots$$

$$Z_x e^{-ra/2} - (e^{ra}-1)(e^{rx})(Z_{x+a} e^{-r(x+a+a/2)} + Z_{x+2a} e^{-r(x+2a+a/2)} + \ldots)$$

c'est à dire $Y_x = e^{-ra/2} S_x - (e^{ra}-1)e^{rx} T_x$.

On retrouve bien Z_x quand r vaut zéro.

7. Les pyramides de survie de ces populations stables ne sont pas monotones décroissantes. Le nombre maximum de décès attendus se situe entre 60 et 65 années pour les femmes et 55-60 pour les hommes.

Plus la population est jeune, c'est-à-dire plus le taux de croissance est fort, plus la pyramide de survie se rapproche de la forme de la distribution des décès de la table de mortalité associée.

Un taux de croissance même faible modifie profondément la forme de la courbe.

Exercice 2

Les équations du système sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{dH}{dt} = (1 - 0{,}01P)\, H \\ \\ \dfrac{dP}{dt} = (-0{,}5 + 0{,}002H)\, P \end{cases}$$

D'après le cours la période du cycle produit est $T = \dfrac{2x3{,}14159}{1x0{,}5} = 8{,}886$ mois

L'équilibre trivial est obtenu pour H=250 et P = 100. Si la valeur maximale du nombre des hôtes est 300, les oscillations autour de ce point d'équilibre seront de faible amplitude et le mouvement sera régi suivant une ellipse d'équation :

$$(0{,}002)^2 . 1\, h^2 + (0{,}01)^2 . 0{,}5\, p^2 = \text{Cste} \quad (h=H-250 \text{ et } p = P-100)$$

Pour h=300 - 250 = 50 on trouve que la constante vaut 0,01, l'équation s'écrit alors :

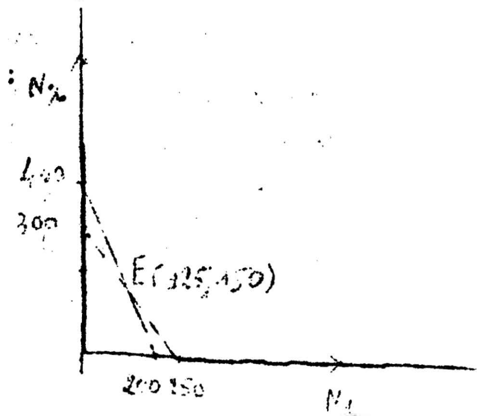
$$4h^2 + 50\,p^2 = 10\,000$$

Le nombre maximal de parasites vaut donc 14,14 + 100 = 114, il est atteint 2,22 mois après que le nombre maximal d'hôtes ait été observé.

Exercice 3

Dans une population logistique le point d'inflexion est obtenu quand la population atteint la moitié de sa taille limite, soient 100 pour l'espèce 1 et 150 pour l'espèce 2.

2. Les équations différentielles s'écrivent :



$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{N_1 dt} = 0{,}06 - 0{,}0003 N_1 - 0{,}00015\, N_2 \\[2ex] \dfrac{dN_2}{N_2 dt} = 0{,}04 - 0{,}00016\, N_1 - 0{,}0001333\, N_2 \end{cases}$$

Il suffit de tracer les deux droites pour lesquelles les deux dérivées s'annulent. Le point de rencontre N_{1e} = 125 et N_{2e} = 150 est un point d'équilibre stable. Quelque soit le point de départ, les deux espèces se retrouveront à ce point d'équilibre.

4 Comme on a inversé les deux droites le point d'équilibre devient instable. Au point N_1 = 50 et N_2 = 300, le taux de croissance de l'espèce 2 est nul. Celui de l'espèce 1 est au contraire négatif. L'espèce 1 va décroitre en nombre, et l'espèce 2 va pouvoir croitre jusqu'à éliminer l'espèce 1.

corrigé n°2

3

FEMMES

AGE	Survivants	Population Stationnaire Z_x	Population stable $e^{-r(x+5/2)}Z_x$	T_x	Population stable Pyramide de survie Y_x	Cumul des décès	Population Stationnaire Normée
0	10000.	9715.	8961.	42541.	1525.	0.	3745
5	9430.	9410.	7506.	35155.	1439.	1525.	3627
10	9391.	9377.	6262.	28093.	1655.	2944.	3614
15	9363.	9344.	5310.	23583.	1910.	4599.	3602
20	9326.	9287.	4490.	19093.	2152.	6508.	3500
25	9248.	9195.	3783.	15310.	2456.	8690.	3545
30	9144.	9075.	3177.	12133.	2757.	11156.	3498
35	9007.	8925.	2659.	9474.	3092.	13923.	3441
40	8849.	8738.	2214.	7260.	3428.	17016.	3369
45	8627.	8423.	1817.	5442.	3694.	20444.	3249
50	8230.	8059.	1409.	3962.	3951.	24138.	3226
55	7908.	7580.	1199.	2763.	4223.	28089.	2960
60	7453.	7130.	947.	1815.	4366.	32312.	2749
65	6807.	6347.	722.	1094.	4326.	36678.	2462
70	5968.	5553.	544.	551.	4259.	41004.	2179
75	5338.	4172.	341.	209.	3435.	45293.	1608
80+	3807.	3237.	209.	0.	2774.	45728.	1159

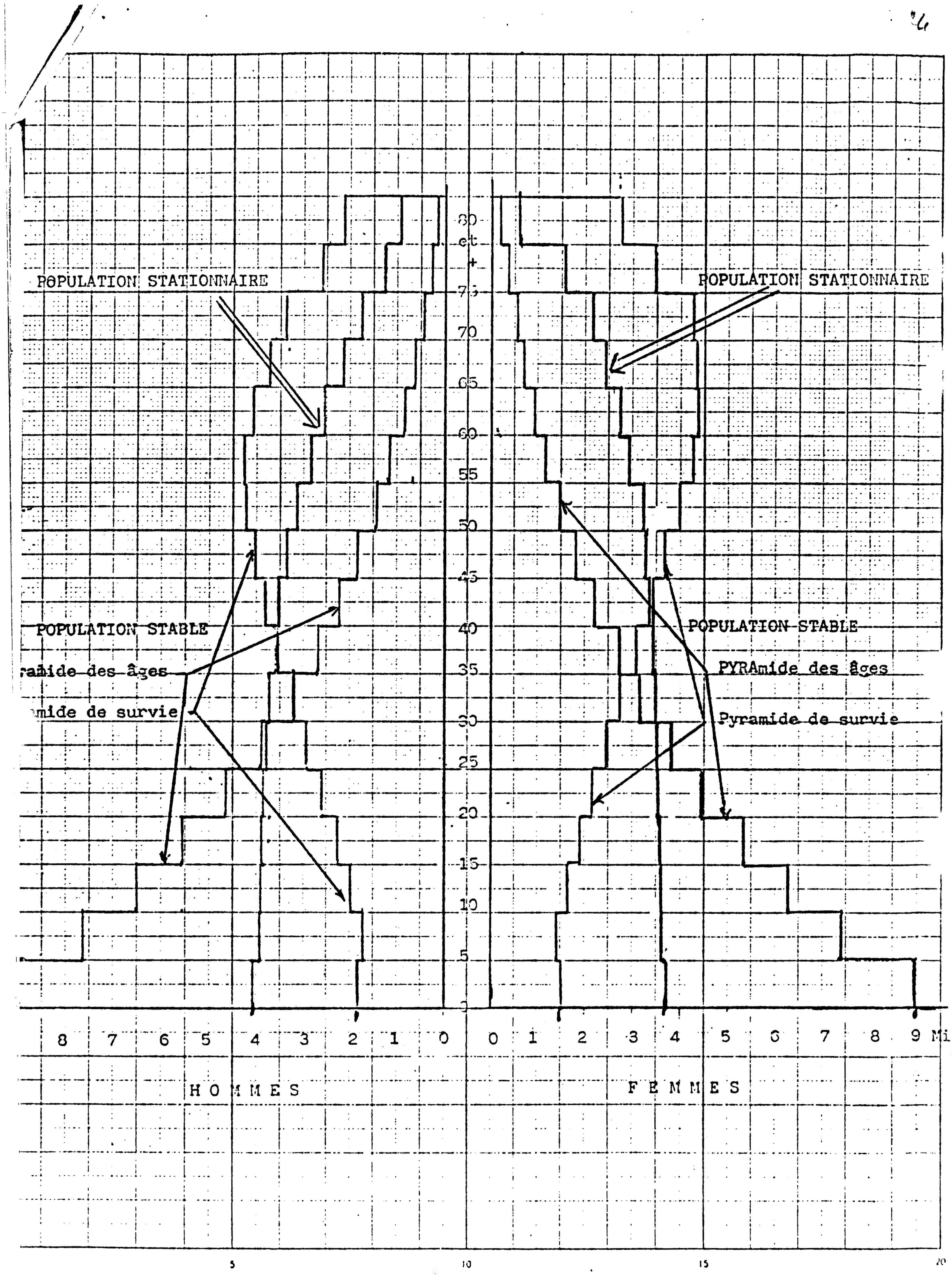
134536 51502 51502

HOMMES

0	10500.	10152.	9364.	43030.	1822.	0.	4075	0
5	9974.	9776.	7674.	35355.	1737.	1822.	3925	5
10	9752.	9733.	6520.	26855.	1993.	3559.	3907	10
15	9715.	9682.	5522.	23353.	2256.	5552.	3886	15
20	9649.	9575.	4639.	19714.	2593.	7836.	3851	20
25	9541.	9451.	3892.	14022.	2902.	10431.	3798	25
30	9381.	9276.	3247.	11575.	3217.	13333.	3723	30
35	9172.	9047.	2694.	8081.	3524.	16543.	3631	35
40	8922.	8755.	2219.	6662.	3825.	20067.	3514	40
45	8586.	8364.	1803.	4659.	3971.	23592.	3357	45
50	8149.	7846.	1437.	3427.	4220.	27963.	3149	50
55	7553.	7194.	1123.	2297.	4257.	32187.	2888	55
60	6835.	6355.	644.	1453.	4044.	36444.	2551	60
65	5874.	5356.	605.	847.	3728.	40535.	2150	65
70	4837.	4412.	424.	423.	3359.	44266.	1771	70
75	3987.	3169.	259.	164.	2630.	47624.	1272	75
80+	2352.	2332.	164.	0.	2177.	52224.	944	80 et +

130592

52394 52394



POPULATION STATIONNAIRE
POPULATION STATIONNAIRE
80 et +
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
POPULATION STABLE
ramide des âges
amide de survie
POPULATION STABLE
PYRAmide des âges
Pyramide de survie
8 7 6 5 4 3 2 1 0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 Mi
HOMMES
FEMMES

I.FO.R.D. - ANNEE UNIVERSITAIRE 1983-1984 DED.2 Document Pédagogique N° 60 - Février 1984 MOUVEMENTS ET MODELES DE POPULATION

(N. BROUARD)

CORRIGE DES TRAVAUX DIRIGES N° 2

1 Exercice I

1. Le nombre de naissances est constant dans une population stationnaire. Si S_0 vaut 10 000, le nombre des jeunes filles ayant entre 0 et 4 ans révolues est
$$Z_0 = \frac{S_0 + S_5}{2}\,,\ \text{de même } Z_x = \frac{S_x + S_{x+5}}{2}\,,$$
2. - La somme des taux de fécondité par âge vaut 1,143, la somme des naissances réduites vaut donc 5 fois plus (les taux sont quinquennaux) soit 5,715 enfants par femme. Les taux nets de fécondité sont obtenus en multipliant les taux bruts par la probabilité de survie en milieu de période soit $Z_x \cdot F_x$. En tenant compte de la mortalité, une femme nà fait donc plus que 5,21 enfants en moyenne, et l'âge moyen à la maternité est de 28,8 ans.

   Le taux instantané de Lotka vaut alors $r = \frac{\text{Log}(R_0)}{\bar{a}}$, soit $r = \frac{\text{Log}(2{,}54)}{28{,}8} = 3,23$ %. Le taux net de reproduction vaut en effet $5,21 \cdot \frac{100}{205} = 2,54$
3. 6,2 enfants par homme correspondent à $6,2\frac{105}{205} = 3,17$ garçons survivants par homme. L'âge moyen à la paternité doit donc être de $\frac{\text{Log}(2{,}54)}{0{,}0323} = 35,8$ ans.
4. La population stable a une structure par âge indépendante du temps. On peut prendre $\mathrm{e}^{-r(+a/2)}\,Z_x$, ce qui correspond à une population totale de 51502 femmes ($r = 0,0322$, $a = 5$). En effet le cumul des effectifs : $T_x = \sum_{y=x+5} \mathrm{e}^{-r(y+a/2)}\,Z_y$, présenté comme l'énoncé le demandait, nous conduit, à ce chiffre.

On a aussi calculer la structure par âge de la population stationnaire qui correspond au même effectif de 51502 femmes.

Les differentes structures par âge sont données dans le tableau ci-joint et les pyramides correspondantes sont dessinées sur le graphique.

FEMMES

AGE	Survivants	Z_x Population Stationnaire	Population stable $e^{-r(x+5/2)}Z_x$	T_x	Population stabl Pyramide de survie Y_x	Cumul des décès	Population Station Normée
0	10000.	9715.	8961.	42541.	1525.	0.	3745
5	9430.	9410.	7386.	35155.	1439.	1535.	3627
10	9391.	9377.	6262.	28093.	1655.	2944.	3614
15	9363.	9344.	5310.	23583.	1919.	4599.	3602
20	9326.	9287.	4490.	19093.	2102.	6538.	3500
25	9248.	9196.	3783.	15310.	2456.	8693.	3545
30	9144.	9075.	3177.	12133.	2767.	11156.	3498
35	9007.	8925.	2659.	9474.	3092.	13923.	3441
40	8849.	8738.	2214.	7260.	3428.	17016.	3369
45	8627.	8423.	1817.	5442.	3694.	20444.	3249
50	8230.	8059.	1489.	3962.	3951.	24138.	3226
55	7908.	7580.	1199.	2763.	4223.	28089.	2960
60	7453.	7130.	947.	1816.	4366.	32312.	2749
65	6607.	6347.	722.	1094.	4326.	36678.	2462
70	5968.	5553.	544.	551.	4209.	41004.	2179
75	5338.	4172.	341.	209.	3435.	45293.	1608
80+	3007.	3037.	209.	0.	2774.	48728.	1159
	134536	51502			51502		

HOMMES

AGE	Survivants	Z_x Population Stationnaire	Population stable $e^{-r(x+5/2)}Z_x$	T_x	Population stabl Pyramide de survie Y_x	Cumul des décès	Population Station Normée	
0	10500.	10152.	9364.	43030.	1822.	0.	4075	0
5	9994.	9776.	7674.	35355.	1737.	1822.	3925	5
10	9752.	9733.	6520.	28855.	1993.	3559.	3907	10
15	9715.	9682.	5522.	23353.	2256.	5552.	3886	15
20	9649.	9595.	4639.	18714.	2593.	7838.	3851	20
25	9541.	9451.	3872.	14082.	2902.	10431.	3790	25
30	9361.	9276.	3247.	11575.	3219.	13333.	3723	30
35	9172.	9047.	2694.	8081.	3524.	16543.	3631	35
40	8922.	8755.	2219.	6662.	3825.	20067.	3514	40
45	8588.	8364.	1803.	4059.	3971.	23892.	3357	45
50	8149.	7846.	1437.	3427.	4220.	27863.	3149	50
55	7553.	7194.	1123.	2297.	4257.	32157.	2888	55
60	6835.	6355.	844.	1153.	4094.	36444.	2551	60
65	5874.	5356.	605.	647.	3720.	40535.	2150	65
70	4837.	4412.	424.	423.	3359.	44265.	1771	70
75	3997.	3169.	259.	164.	2630.	47624.	1272	75
80+	2352.	2332.	164.	0.	2177.	50224.	944	80 et +
	130523	52394			52394			

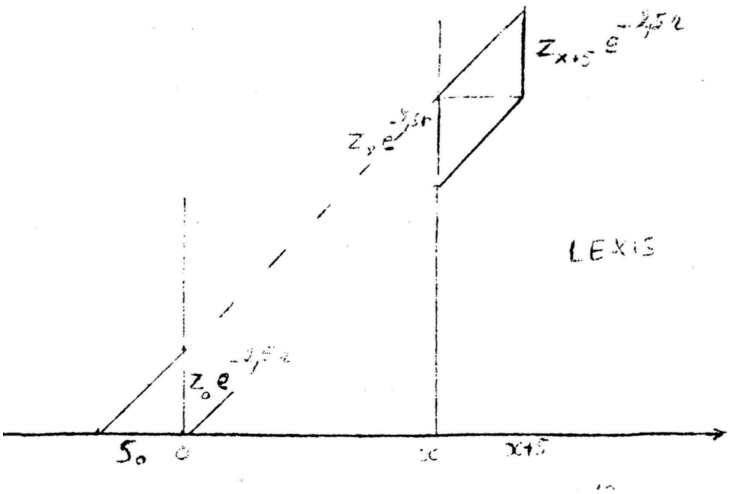
5. Si le taux de croissance est nul la population est stationnaire. Si à l'instant t, la structure par âge est Z_x , 5 années plus tard, les Z_x femmes âgées entre x et $x+4$ années (révolues), ne seront plus que Z_{x+5} . A l'instant t, $Z_x - Z_{x+5}$, décès de femmes sont donc attendus dans les 5 ans. La somme des décès attendus avant cinq années est donc : $Y_0 = Z_0 - Z_5 + (Z_5 - Z_{10}) + \cdots = Z_0$, celle des décès attendus

entre 5 et 10 ans est de même :

$$Y_5 = (Z_5 - Z_{10} + (Z_{10} - Z_{15}) + \cdots = Z_5 \text{ etc.}$$

Propriété

Dans une population stationnaire on dénombre autant d'individus ayant vécu x années que d'individus ayant x années à vivre.



6. Entre x et $x+5$ années et parmi les $Z_0\,\mathrm{e}^{-r5/2}$ femmes de la population stable âgées entre 0 et 4 ans révolus, on décomptera $(Z_x - Z_{x+5})\,\mathrm{e}^{-r5/2}$ décès. La somme des décès escomptés est donc :

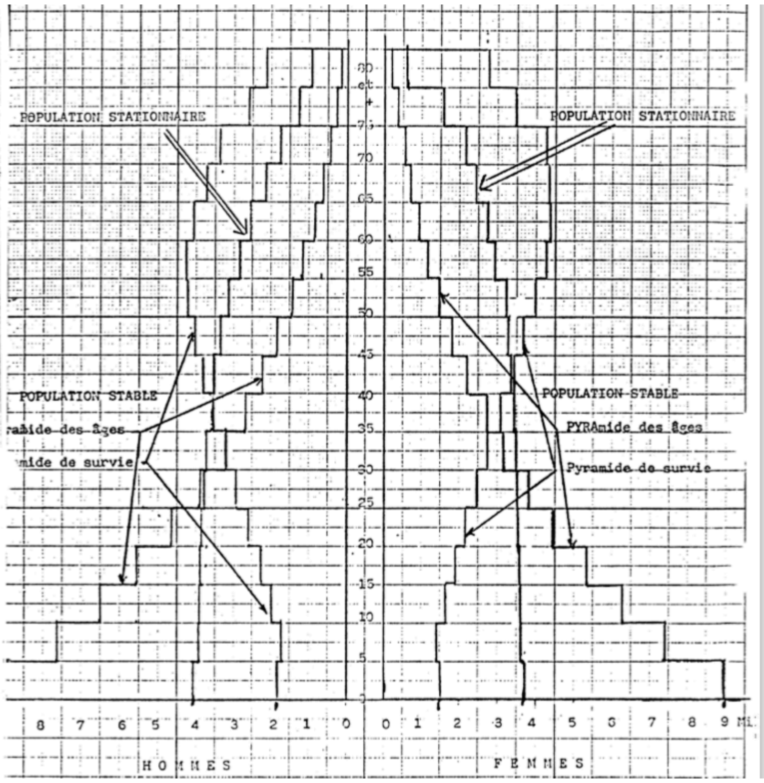
$$
\begin{aligned}
Y_x &= (Z_x - Z_{x+5})\,\mathrm{e}^{-r(5/2)} + (Z_{x+5} - Z_{x+10})\,\mathrm{e}^{-r(5+5/2)} + (Z_{x+10} - Z_{x+15})\,\mathrm{e}^{-r(10+5/2)} + \cdots \\
Y_x &= (Z_x - Z_{x+a})\,\mathrm{e}^{-r(a/2)} + (Z_{x+a} - Z_{x+2a})\,\mathrm{e}^{-r(a+a/2)} + (Z_{x+2a} - Z_{x+3a})\,\mathrm{e}^{-r(2a+a/2)} + \cdots \\
&= Z_x\,\mathrm{e}^{r(a/2)} + (1 - \mathrm{e}^{ra})T_x\,\mathrm{e}^{rx}
\end{aligned}
$$

On retrouve bien Z_x quand r vaut zéro.

7. Les pyramides de survie de ces populations stables ne sont pas monotones décroissantes. Le nombre maximum de décès attendus se situe entre 60 et 65 années pour les femmes et 55-60 pour les hommes.

   Plus la population est jeune, c'est-à-dire plus le taux de croissance est fort, plus la pyramide de survie se rapproche de la forme de la distribution des décès de la table de mortalité associée.

   Un taux de croissance même faible modifie profondément la forme de la courbe.



POPULATION STATIONNAIRE
POPULATION STATIONNAIRE
80 et +
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
POPULATION STABLE
ramide des âges
mide de survie
POPULATION STABLE
PYRAmide des âges
Pyramide de survie
8 7 6 5 4 3 2 1 0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 Ml
HOMMES
FEMMES

I.FO.R.D. - ANNEE UNIVERSITAIRE 1983-1984
DED.2
Document Pédagogique N° 60 - Février 1984
MOUVEMENTS ET MODELES DE POPULATION

(N. BROUARD)

CORRIGE DES TRAVAUX DIRIGES N° 2

1 Exercise I

1. The number of births is constant in a stationary population. If S_0 is equal 10,000, the number of young girls aged between 0 and 4 is

$$Z_0 = \frac{S_0 + S_5}{2}\ , \text{ as well } Z_x = \frac{S_x + S_{x+5}}{2}\ ,$$

2. The sum of the age-specific fertility rates is 1.143, so the sum of the reduced births (TFR in English) is 5 times more (the rates are five-year), or 5.715 children per woman. Net fertility rates are obtained by multiplying the crude rates by the probability of survival in the middle of the period, ie $Z_x \cdot F_x$. Taking into account mortality, a woman therefore has an average of only 5.21 children, and the mean age at childbearing is 28.8 years.

   The instant rate of Lotka is then $r = \frac{\mathrm{Log}(R_0)}{\bar{a}}$, which is $r = \frac{\mathrm{Log}(2.54)}{28.8} = 3.23$ %. The net reproduction rate is then $5.21 \cdot \frac{100}{205} = 2.54$

3. 6.2 children per man correspond to $6.2\frac{105}{205} = 3.17$ boys surviving per man. The mean age at childbearing for a man should therefore be equal to $\frac{\mathrm{Log}(2.54)}{0.0323} = 35.8$ ans.

4. The stable population has an age structure independent of time. We can take $\mathrm{e}^{-r(+a/2)}\, Z_x$, which corresponds to a total population of 51502 women ($r = 0.0322$, $a = 5$). Indeed, the cumulation of the numbers, $T_x = \sum_{y=x+5} \mathrm{e}^{-r(y+a/2)}\, Z_y$, presented as the statement required, leads us to this figure.

We also calculated the age structure of the stationary population with the same total size of 51,502 women.

The various age structures are given in the following tables and the corresponding pyramids are drawn on the graph.

	AGE	Survivants	Z_x Population Stationnaire	Population stable $e^{-r(x+5/2)}Z_x$	T_x	Population stabl Pyramide de survie Y_x	Cumul des décès	Population Stat. Hommes	
FEMMES	0	10000.	9715.	8961.	42541.	1525.	0.	3745	
	5	9430.	9410.	7386.	35155.	1439.	1535.	3627	
	10	9391.	9377.	6262.	28093.	1655.	2944.	3614	
	15	9363.	9344.	5310.	23583.	1919.	4599.	3602	
	20	9326.	9287.	4490.	19093.	2102.	6530.	3500	
	25	9248.	9175.	3783.	15310.	2456.	8693.	3545	
	30	9144.	9075.	3177.	12133.	2757.	11156.	3498	
	35	9007.	8925.	2659.	9474.	3092.	13923.	3441	
	40	8849.	8738.	2214.	7260.	3428.	17016.	3369	
	45	8627.	8423.	1817.	5482.	3694.	20444.	3249	
	50	8230.	8059.	1489.	3962.	3951.	24138.	3226	
	55	7908.	7580.	1199.	2763.	4223.	28089.	2960	
	60	7453.	7130.	947.	1816.	4366.	32312.	2749	
	65	6607.	6347.	722.	1094.	4326.	36678.	2462	
	70	5968.	5553.	544.	551.	4209.	41004.	2179	
	75	5338.	4172.	341.	209.	3435.	45293.	1608	
	80+	3007.	3037.	209.	0.	2774.	49728.	1159	
		134596	51502			51502			
HOMMES	0	10500.	10152.	9364.	43030.	1822.	0.	4075	0
	5	9594.	9776.	7674.	35355.	1737.	1822.	3925	5
	10	9752.	9733.	6520.	28855.	1993.	3559.	3907	10
	15	9715.	9692.	5522.	23353.	2254.	5552.	3886	15
	20	9649.	9595.	4639.	18714.	2593.	7833.	3851	20
	25	9541.	9451.	3892.	14822.	2902.	10431.	3790	25
	30	9361.	9276.	3247.	11575.	3219.	13333.	3723	30
	35	9172.	9047.	2694.	8381.	3524.	16543.	3631	35
	40	8922.	8755.	2219.	6662.	3825.	20067.	3514	40
	45	8588.	8364.	1803.	4059.	3971.	23892.	3357	45
	50	8140.	7846.	1437.	3427.	4220.	27863.	3149	50
	55	7553.	7194.	1123.	2297.	4257.	32157.	2888	55
	60	6835.	6355.	844.	1153.	4044.	36444.	2551	60
	65	5874.	5356.	605.	547.	3720.	40535.	2150	65
	70	4837.	4412.	424.	423.	3359.	44265.	1771	70
	75	3907.	3169.	259.	164.	2630.	47624.	1272	75
	80+	2352.	2352.	164.	0.	2170.	50224.	944	80 et +
		130591		52394		52394			

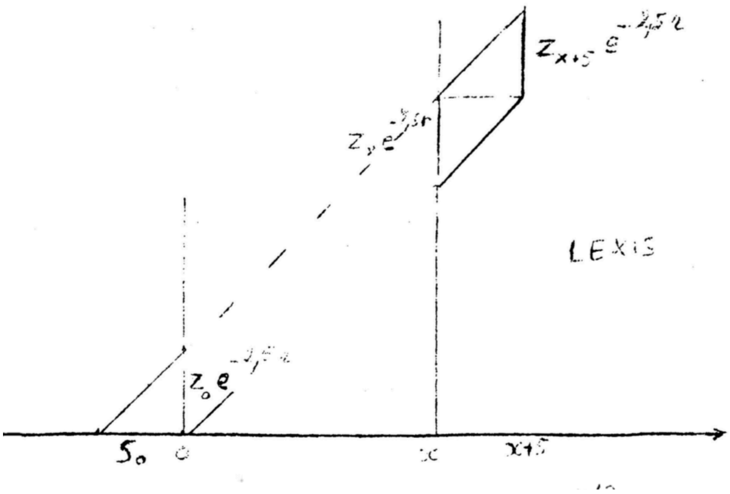
5. If the growth rate is zero, the populaton is stationary. If at time t, the age structure is Z_x , 5 years later, the Z_x women aged between x and $x+4$ years (completed), will be only Z_{x+5} . At instant t, $Z_x - Z_{x+5}$, deaths from women are expected in the next 5 years. The sum of the deaths expected before the next five years is therefore : $Y_0 = Z_0 - Z_5 + (Z_5 - Z_{10}) + \cdots = Z_0$, and those of the deaths to be

expected in the next 5 to 10 years is, analogously :

$$Y_5 = (Z_5 - Z_{10} + (Z_{10} - Z_{15}) + \cdots = Z_5 \text{ etc.}$$

Property

In a stationary population there are as many individuals having lived x years as individuals having x years to live.



6. Between x and $x+5$ years and among the $Z_0\,\mathrm{e}^{-r5/2}$ women of the stable population between 0 and 4 years old, we will count $(Z_x - Z_{x+5})\,\mathrm{e}^{-r5/2}$ deaths. The sum of expected deaths is therefore :

$$Y_x = (Z_x - Z_{x+5})\,\mathrm{e}^{-r(5/2)} + (Z_{x+5} - Z_{x+10})\,\mathrm{e}^{-r(5+5/2)} + (Z_{x+10} - Z_{x+15})\,\mathrm{e}^{-r(10+5/2)} + \cdots$$

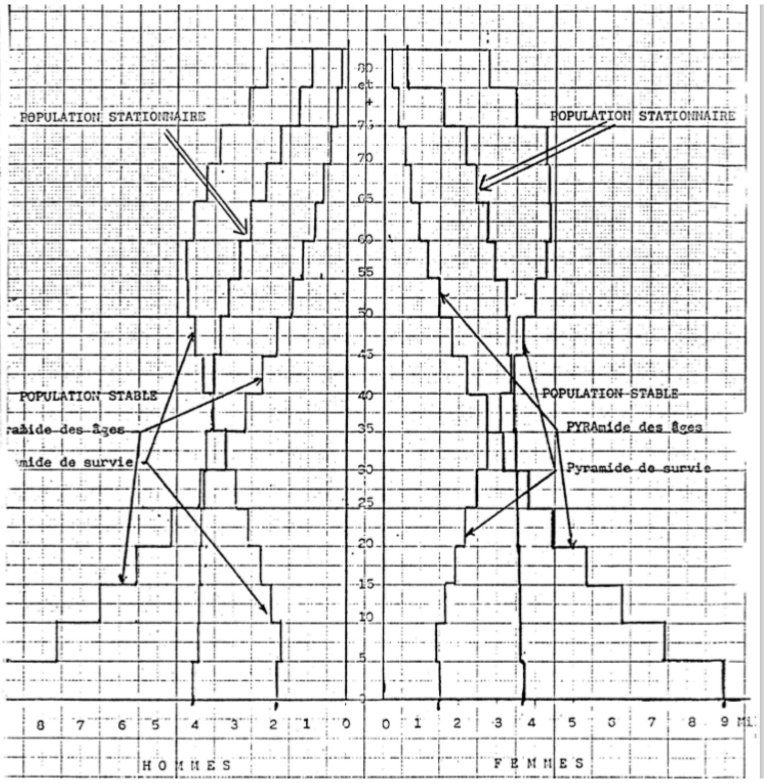
$$Y_x = (Z_x - Z_{x+a})\,\mathrm{e}^{-r(a/2)} + (Z_{x+a} - Z_{x+2a})\,\mathrm{e}^{-r(a+a/2)} + (Z_{x+2a} - Z_{x+3a})\,\mathrm{e}^{-r(2a+a/2)} + \cdots$$
$$= Z_x\,\mathrm{e}^{r(a/2)} + (1 - \mathrm{e}^{ra})T_x\,\mathrm{e}^{rx}$$

We verify that we get Z_x when r is equal to zero.

7. The survival pyramids of these stable populations are not monotonous decreasing. The maximum number of expected deaths is between 60 and 65 years for women and 55-60 for men.

The younger the population, that is, the higher the growth rate, the closer the survival pyramid is to the shape of the death distribution of the associated mortality table.

Even a low growth rate profoundly changes the shape of the curve.



POPULATION STATIONNAIRE
POPULATION STATIONNAIRE
POPULATION STABLE
ramide des âges
mide de survie
POPULATION STABLE
PYRAmide des âges
Pyramide de survie
80 et +
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
8 7 6 5 4 3 2 1 0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 Mi
HOMMES
FEMMES